


See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/284564077>

Aerodynamic Computation and Optimal Projection of Turbomachine Flow Paths (in Russian)

Book · January 2002

CITATIONS	READS
0	515

5 authors, including:



[Sergiy Yershov](#)
<http://sergiyyershov.com>
111 PUBLICATIONS 131 CITATIONS

SEE PROFILE



[Andrey V Rusanov](#)
National Academy of Sciences of Ukraine
44 PUBLICATIONS 94 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Project

An investigation of laminar-to-turbulent transition in several turbine stages with different inlet turbulence intensity and of the transition effect on the secondary flow pattern in the turbomachinery cascades [View project](#)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

А.В.Бойко, Ю.Н.Говорущенко, С.В.Ершов,
А.В.Русанов, С.Д.Северин

**Аэродинамический расчёт
и оптимальное
проектирование
проточной части
турбомашин**

Под редакцией д.т.н. проф. Бойко А.В.

Харьков НТУ«ХПИ» 2002

УДК.621.165

Друкується за рішенням вченої ради Національного технічного університету «ХПІ» протокол №10 від 26 жовтня 2001 року та науково-технічної ради Секції прикладних проблем Президії Національної академії наук України протокол №15 від 2 жовтня 2001 року.

А.В.Бойко, Ю.Н.Говорущенко, С.В.Ершов, А.В.Русанов, С.Д.Северін.
Аеродинамічний розрахунок та оптимальне проектування проточної частини турбомашин; Монографія. – Харків, НТУ «ХПІ», 2002. – 356с. – Рос. мовою.

ISBN 966-593-228-4

Розглянуто новий підхід до рішення комплексної багаторівневої проблеми – оптимального проектування турбомашини як складної технічної системи, з використанням блочно-ієрархічного процесу оптимізації, який забезпечує максимум глобального критерію якості системи та її надійності. Викладається задача оптимального просторового профілювання ступенів турбін на базі сучасного числового методу розрахунку в'язкої трьохмірної течії. Описані питання оптимального проектування проточної частини компресорів. Представлені комплекси програм, з використанням яких проведені розрахунки та наведені багаточисленні приклади оптимального проектування ступенів та решіток осевих турбін та компресорів як в квайдимірній так і трьохмірній постановці.

Для наукових працівників з проектування, розрахунку та дослідження турбомашин. Корисна для викладачів, аспірантів та студентів старших курсів Технічних Університетів.

Рассмотрен новый подход к решению комплексной многоуровневой задачи - оптимальному проектированию турбоустановки как сложной технической системы, с использованием блочно-иерархического процесса оптимизации, обеспечивающий максимум глобального критерия качества системы и её надёжность. Излагается задача об оптимальном пространственном профилировании ступеней турбин на базе современного численного метода расчёта вязкого трёхмерного течения. Описаны вопросы оптимального проектирования проточной части осевых компрессоров. Представлены комплексы программ, с использованием которых проведены расчёты и приводятся многочисленные примеры оптимального профилирования ступеней и решеток осевых турбин и компрессоров как в квайдвумерной, так и трёхмерной постановке.

Для научных работников и специалистов по проектированию, расчёту и исследованию турбомашин. Полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов Технических Университетов.

ISBN 966-593-228-4

© А.В.Бойко, Ю.Н.Говорущенко,
С.В.Ершов, А.В.Русанов, С.Д.Северин
2002.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF
UKRAINE
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

A.V.Boiko, Yu.N.Govorushchenko,
S.V.Yershov, A.V.Rusanov and S.D.Severin

Aerodynamic Computation and Optimal Projection of Turbomachine Flow Paths

Edited by Prof. A.V.Boiko, D.Sc.

Kharkov NTU“KhPI” 2002

A new approach to the computation of complicated multilevel problems for the optimal projection of turbomachinery has been examined using a block-hierarchical optimization process that guarantees the global quality criteria maximum and reliability.

Quasi-two-dimensional aerodynamic models of turbine stages, widely used for the optimization of flow paths in turbomachines, models of working mediums and processes, programs for calculating the geometric, strength and gas dynamic characteristics of cascades of turbine profiles, which are crucial for the optimization of turbomachines, are presented.

The basic requirements are formulated, based on which different numeric methods for the computation of viscous non-stationary and non-linear three-dimensional problems of gas dynamics are analysed.

New schemes for solving formulated problems are proposed.

In conformity with the task formulated – optimization of turbomachines, information about problems with extremes and methods of searching for optimal solutions is given.

In the monograph the experience of designers of effective turbine cascades and axial flow paths accumulated during recent decades is collected, summarized, analysed and processed. The combination of programs is presented which allows in PC-Designer dialog to discover the optimal solution taking into account the strength, technological and other restrictions.

In fact, the book describes the set of tools' creation and mathematical apparatus for the optimization of complicated technical systems to create new optimal turbomachinery' design.

The solution of the problem of spatial projection of turbine stages, based on modern numerical methods of computing viscous three-dimensional flow is presented.

Some issues for the optimal projection of flow paths of axial compressors are discussed.

The range of programs (**MACTEP**, **FlowER**, **ATJAC**, **Optimus**) used in the computations is described and numerous examples of optimal design stages and cascades of axial turbines and compressors are presented.

For researchers and experts in calculation, design and research on turbomachines. Useful for University faculty members, post-graduate students and senior students of Technical Universities.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время не только окончательно сформировалось но уже широко используется и продолжает быстро развиваться новое научное направление в турбиностроении – оптимальное проектирование.

Проектирование турбоустановки является сложной многоуровневой задачей.

При этом широкое использование в энергетическом машиностроении современных достижений гидро-аэродинамики, теории тепловых процессов, динамики и прочности машин, материаловедения, теории автоматического регулирования значительно расширяет круг задач, стоящих перед проектировщиком и значительно их усложняет.

Практически на всех уровнях проектирования на сегодняшний день созданы прикладные программы, позволяющие решать оптимизационные задачи, используя разнообразный математический аппарат. Однако, в процессе оптимального проектирования исключительно важную роль играет информационная согласованность между уровнями, которая зачастую отсутствует. Всё это усложняет задачу оптимального проектирования турбоустановки как сложной технической системы.

Работа с широким диапазоном математических моделей и обеспечение для каждой задачи проектирования информационной связи с подсистемами соседних уровней может быть достигнута с использованием блочно-иерархического представления процесса проектирования путём перехода от исходных математических моделей подсистем и численных методов оптимизации к некоторой универсальной математической модели и универсальному методу оптимизации параметров.

Однотипность математических моделей подсистем одного уровня и их локальных критериев оптимальности позволяют организовать процесс многоуровневого проектирования, обеспечивающий максимум глобального критерия качества системы, в нашем случае турбоустановки.

В монографии рассмотрены общие вопросы оптимизации турбомашин и один из подходов к проектированию турбоустановки с использованием вышеизложенного блочно-иерархического представления.

Изложены квазидвумерные аэродинамические модели турбинных ступеней, позволяющие их широкое использование в оптимизационных задачах проточной части турбомашин, модели состояния рабочих тел и процессов, предлагаются программы расчёта геометрических, прочностных и газодинамических характеристик решеток профилей, без достоверных оценок которых невозможно говорить об оптимизации турбоустановки. Сбран, обобщён, проанализирован, обработан и доведён до возможности использования в задачах оптимального проектирования турбоустановок накопленный за десятки предыдущих лет опыт проектировщиков эффективных решеток турбинных профилей.

Описывается созданный программный комплекс **МАСТЕР**, как хорошо зарекомендовавший себя инструмент решения задач расчета проточной части турбомашин.

Появление модели трёхмерного вязкого нестационарного течения рабочего тела через решетки турбомашин и численное решение этой задачи в сочетании с быстро развивающимися возможностями вычислительной техники значительно расширило возможности проектировщиков и позволило поставить задачу об оптимальном пространственном профилировании ступеней турбомашин. Таким образом мы имеем возможность осуществлять «доводку» оптимизированной ступени с помощью трёхмерной модели. Эта доводка может касаться уточнения распределения по высоте лопатки углов установки плоских сечений, осевых и окружных навалов, проектирования саблевидной формы лопатки.

Сформулированы основные требования, на основании которых проанализированы различные численные методы для решения вязких сжимаемых нестационарных нелинейных задач газовой динамики. На основании сделанного анализа предложены новые схемы для решения поставленной задачи, которые реализованы в виде комплекса программ **FlowER**, показавший свою работоспособность, достаточную надёжность и точность результатов.

В книге, применительно к поставленной цели - оптимизации турбоустановки, даются некоторые сведения об экстремальных задачах и методы поиска оптимальных решений.

Важное место уделено оптимальному проектированию проточной части многоступенчатых турбин, включающему, в том числе, определение оптимального количества ступеней в отсеке и распределение теплоперепада между ступенями. При этом задача оптимизации решается различными методами: с помощью аналитических решений, методом нелинейного программирования и с помощью планирования эксперимента, применение которых определяется той или иной постановкой задачи оптимального проектирования (например, при заданных осевых составляющих скоростей, при заданной форме проточной части или для задачи связанной с оптимальным проектированием унифицированных проточных частей с известным количеством ступеней, в том числе, работающих в условиях изменяющихся режимных параметров). Приводятся примеры решения практических задач многорежимной оптимизации многоступенчатых турбин в рамках их модернизации.

Определение оптимальных параметров плоских решеток профилей и ступеней для проектируемой проточной части осевой турбины имеет важное значение. Именно поэтому в монографии рассмотрены задачи оптимизации рабочих и сопловых решеток а также их совместная оптимизация. Рассмотрены методы создания профилей оптимальной аэродинамической формы, удовлетворяющих прочностным, технологическим и конструктивным требованиям, по различным критериям качества, включая минимум профильных потерь. На основании разработанных программ, включая систему программ **АТЛАС**, предназначенной для предварительного проектирования проточных частей одно- и многоступенчатых осевых турбин, рассчитаны и приведены примеры автоматизированного проектирования сопловых и рабочих решеток профилей, одиночных ступеней и многоступенчатых проточных частей турбин.

Рассмотрена задача об оптимальном пространственном профилировании ступеней турбин на базе современного численного метода расчёта вязкого трёхмерного течения, реализация которой осуществлена комплексом программ **Optimus**.

Приводятся примеры оптимального пространственного профилирования турбинных ступеней.

Оптимизация газотурбинных установок невозможна без оптимизации компрессоров, эффективность которых во многом определяет КПД и надёжность газотурбинных установок в целом. Методология и стратегия оптимизации единая как для турбин, так и для компрессоров, хотя, естественно последние имеют свои особенности. Изложением вопросов оптимального проектирования проточной части осевых компрессоров и завершается монография.

Авторами Глав 1, 2, 4, 5 и 6 являются д.т.н. А.В.Бойко и к.т.н. Ю.Н.Говорушенко. Изложенные в вышеуказанных главах исследования выполнены на кафедре турбиностроения Национального Технического Университета «Харьковский Политехнический Институт». Авторы выражают благодарность, принимавшим активное участие и внёсшим огромный вклад в выполнение этих работ, к.т.н. Кожевникову С.Н., к.т.н. Романову Г.Л., к.т.н. Усатому А.П. и инж. Скибиной Е.Э.

Искреннюю благодарность авторы выражают также Заслуженному деятелю науки Украины, Лауреату Государственной премии Украины в области науки и техники д.т.н. проф. Капиносу В.М., обладающему удивительной научной интуицией и создавшему (будучи в течение десяти лет заведующим кафедрой турбиностроения «ХПИ») все условия для поддержки и развития зарождающегося на кафедре в середине семидесятых и начале восьмидесятых годов нового научного направления в турбиностроении – оптимального проектирования. Новое научное направление, оптимальное проектирование, не родилось на пустом месте. Только благодаря созданной научной школе кафедры турбиностроения «ХПИ», во главе которой много лет стоял д.т.н. проф. Шнез Я.И., могло оно зародиться, созреть и развиваться.

Авторами Глав 3 и 7 а также подраздела 4.4 являются д.т.н. С.В.Ершов и к.т.н. А.В.Русанов (Институт проблем машиностроения НАН Украины), которые выражают благодарность математику-программисту А.Ю.Шапочке, внёсшему незаменимый вклад в постановку задачи и разработку комплекса программ *Optimus*.

Глава 8 написана к.т.н. С.Д.Севериным (Национальная академия наук Украины).

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a – скорость звука;
 коэффициент изэнтропийности;
 горло межлопаточного канала;
 α_n – коэффициент возврата
 теплоты группы n ступеней;
 b – хорда профиля лопаток, м;
 e – полная энергия единицы
 объема;
 B – осевая ширина решетки, мм;
 C_ϕ – скорость, эквивалентная
 перепаду на отсек или ступень;
 C , C_r , C_u , C_z – абсолютная
 скорость и ее составляющие в
 цилиндрической системе коор-
 динат, м/с;
 C_p – удельная теплоемкость при
 постоянном давлении,
 Дж/(кг·град); коэффициент давле-
 ния;
 C_v – удельная теплоемкость при
 постоянном объеме, Дж/(кг·град);
 D (или d) – диаметр ступени
 (кольцевой решетки);
 F – площадь поперечного
 сечения ступени (канала), м²;
 f – относительная площадь;
 G – массовый расход рабочего
 тела, кг/с;
 E, F, G – векторы потоков урав-
 нений Навье-Стокса;
 D, G, L – векторы источник-
 вых членов модели турбулент-
 ности;
 H – вектор источниковых
 членов уравнений Навье-Стокса;
 удельная ротальпия (постоянная
 Бернулли) в относительном дви-

жении; перепад энтальпий в
 турбине,
 H_m – теоретический напор, Дж;
 H_{ad}^* – изэнтропический напор,
 Дж;
 h – удельная потеря кинетической энергии, Дж/кг;
 h_u – удельная работа на
 окружности колеса;
 i – удельная энтальпия, Дж/кг;
 угол атаки, град;
 J – якобиан преобразования
 координат;
 k – кинетическая энергия
 турбулентности; показатель изо-
 энтропы;
 k_σ – коэффициент запаса проч-
 ности;
 l – длина пути смешения, вы-
 сота лопаток решетки;
 L – матрица левых соб-
 ственных векторов или харак-
 терный размер, длина (по линии
 потока) (по контексту);
 $L_{ad,cm}^*$ – адиабатическая работа
 ступени, вычисленная по полным
 параметрам газового потока, Дж;
 L_u – элементарная работа на
 окружности колеса ступени (ра-
 бота вращения элемента ступени
 на цилиндрической поверхности),
 Дж;
 L_r – работа сил трения, Дж;
 M – число Маха;
 n – расстояние до ближайшей
 стенки; число ступеней в отсеке;
 частота вращения рабочего коле-

са в ступени; степень расширения канала;

\vec{n} – вектор нормали;

N – мощность ступени.

p, P – давление, Па;

q – вектор “примитивных” переменных уравнений Навье-Стокса;

\vec{q} – тепловой поток;

Q – вектор консервативных переменных уравнений Навье-Стокса;

r – расстояние от оси вращения,

радиус ступени, радиус окружения входных и выходных кромок,

r, φ, z – оси цилиндрической системы координат;

R – векторы потоков модели турбулентности;

R – газовая постоянная Дж/кг К;

R (или ρ') – степень реактивности, определенная по статическим параметрам на входе в ступень;

\bar{R} (или ρ) – степень реактивности, определенная по параметрам торможения на входе в ступень;

Re – число Рейнольдса;

S – удельная энтропия, Дж/(кг·град); осевое расстояние, м;

S_{ij} – тензор скоростей деформации среднего потока;

t – время, шаг решетки профилей лопаток;

T – температура или матрица перехода от консервативных к “примитивным” переменным (по контексту);

Tu – степень турбулентности;

U – вектор консервативных переменных модели турбулентности;

U, V, W – контравариантные компоненты скорости, соответствующие направлениям ξ, η, ζ соответственно;

u – окружная скорость рабочего колеса,

u_i или u, v, w – декартовы компоненты скорости;

\vec{V} – вектор скорости;

W – скорость рабочего тела в относительном движении;

\bar{x}_f – относительное расстояние вдоль хорды от носика профиля до точки максимального прогиба средней линии;

x_i или x, y, z – декартовы координаты;

z – число лопаток в решетке; последняя ступень турбины;

α, β – углы между C, W и направлением вращения u ;

$\Delta\beta$ – угол поворота потока в решетке;

α', β' – конструктивные лопаточные углы, град;

β_y – угол установки профиля;

β_c – конструктивный угол профиля, град;

γ – показатель адиабаты, угол в меридиональной плоскости;

δ - угол отгиба выходной кромки, зазор;

δ_{ij} – символ Кронекера;

κ - кривизна линий тока, 1/м;

ξ, η, ζ – криволинейные координаты;

$\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \xi_y, \eta_y, \zeta_y, \xi_z, \eta_z, \zeta_z$

– метрические коэффициенты;

ζ - коэффициент потерь, отнесенных к скоростному (динамическому) напору на входе для диффузорных решеток или на выходе для конфузорных;

ξ - коэффициент потерь, отнесенных к теоретическому перепаду на ступень;

$\eta_{ст}^*$ - адиабатический коэффициент полезного действия ступени, посчитанный по полным параметрам газового потока;

η_u - окружной коэффициент полезного действия (к.п.д) ступени;

η_i - внутренний к.п.д. ступени;

λ – коэффициент теплопроводности; приведенная скорость;

λ_ψ – собственные значения;

Λ - штрафной коэффициент, а также коэффициент Лагранжа;

Λ_ψ – диагональные матрицы собственных значений;

μ – коэффициент динамической вязкости, коэффициент массообмена венца; коэффициент использования выходной скорости;

ν - отношение скоростей, u/C_δ ;

Θ - угол изгиба профиля в решетке, град.;

ε (или θ) - угол поворота потока в лопатках, град;

χ - угол установки профилей лопаток в решетке, град;

χ - коэффициент стеснения;

Ω – удельная скорость диссипации (псевдозавихренность), угловая скорость вращения; угол заострения кромок профиля;

Ω – угловая скорость вращения или завихренность (по контексту);

σ - нормальное напряжение в сечении пера лопатки, н/м²;

$\pi_{ст}^*$ - степень повышения полного давления в ступени.

Π – тензор напряжений;

ρ – плотность, кг/м³;

τ – вязкие напряжения;

$\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ - газодинамические функции приведенной скорости для приведенных температуры и плотности;

ψ – одно из сеточных направлений ξ, η, ζ ;

ψ - функция тока;

ψ^* - функция тока при максимальном радиусе;

φ – вектор характеристических переменных;

φ, ψ - коэффициенты скорости для неподвижной и вращающейся решеток;

Нижние индексы:

0, 1, 2 - номера расчетных сечений на входе в ступень, в

межвенцовом зазоре и за рабочим колесом;

j - номер расчетного сечения;

i, j, k направления декартовых координат или номера ячеек, соответствующие этим направлениям (по контексту);

k - номер итерации метода оптимизации;

m - один из сеточных индексов i, j, k ;

w - значение на стенке;

Верхние индексы:

n - номер итерации (шаг по времени).

Другие знаки:

n - наружный (периферийный) радиус; подсос;

$вн$ (или κ) - внутренний (корневой) радиус;

H (или C) - направляющая (сопловая) лопатка;

$ср$ - значение на среднем радиусе;

T - соответствует изэнтропийному расширению рабочего тела;

$и$ - проекция на окружное направление;

$вых$ - выход из рабочей решетки;

M - меридиональный;

$отр$ - отрыва;

ζ - циркуляционной зоны;

i - местное значение;

$в$ - вентиляционный;

$в.с.$ - выходной скорости;

int - интегральный;

$тах$ - максимальный;

$отс$ - отсека;

$ут$ - утечки;

$кр$ - критический;

$ном$ - номинальный.

ГЛАВА 1 ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТУРБОМАШИН

Трудоемкость проектирования турбоустановки связана с необходимостью проработки множества альтернативных вариантов конструкции на основании сложных математических моделей. При этом процесс проектирования является многоуровневым. Созданные прикладные программы позволяют решать оптимизационные задачи практически на всех уровнях проектирования: при расчетах тепловых схем [1], многоступенчатых проточных частей [2], при выборе законов закрутки лопатки ступени [3], при профилировании решеток профилей [4]. Однако разнообразие применяемого математического аппарата и отсутствие информационной согласованности между уровнями затрудняет практическое использование методов оптимального проектирования. Повышение обоснованности принимаемых решений, сокращение сроков разработки изделия могут быть достигнуты за счет объединения проектных процедур в единую систему взаимосвязанных задач оптимизации, решаемых в условиях автоматизированного проектирования (САПР). Методология оптимального проектирования турбоустановки как сложной технической системы должна допускать работу с разнородными математическими моделями и обеспечивать для каждой задачи проектирования информационную связь с подсистемами соседних уровней.

Один из подходов к проектированию турбоустановки с использованием блочно-иерархического представления состоит в переходе от исходных математических моделей подсистем и численных методов оптимизации к некоторой универсальной математической модели и универсальному методу оптимизации параметров.

1.1. Математические модели и задача проектирования объекта

Будем называть исходной математическую модель (ИММ), которая представляет собой замкнутую систему уравнений, описывающих явления, происходящие в объекте проектирования.

Независимо от используемого математического аппарата (алгебраические, обыкновенные дифференциальные, интегральные уравнения, уравнения в частных производных и т.д.), можно представить ИММ символически в следующем виде:

$$\vec{Y} = \vec{Y}(\vec{B}, \vec{X}), \quad L(\vec{B}, \vec{X}) = 0, \quad (1.1)$$

где $\vec{X} = \{\vec{x}, \vec{u}\}$;

$L(\vec{B}, \vec{X})$ - оператор, задающий систему уравнений модели.

Параметры \vec{Y} характеризуют показатели качества; \vec{B} - поступающие в модель подсистемы со смежных уровней, среду функционирования объекта. Параметры \vec{X} могут быть либо зависимыми, вычисляемыми по уравнениям ИММ (\vec{x}), либо независимыми, выбор которых предоставляется проектировщику (\vec{u}). Подразумевается, что в число внутренних параметров объекта входят внутренние параметры всех элементов низлежащих уровней.

Значительное упрощение и унификация описания подсистем достигается аппроксимацией ИММ моделью, которую, следуя [5], будем называть формальной макромоделью (ФММ). Представим ФММ в виде полного полинома 2-й степени, с помощью которого во многих случаях удастся с достаточной точностью аппроксимировать выходные параметры:

$$Y_j = y = A_0 + \sum_{l=1}^N A_l q_l + \sum_{l=1}^N A_{ll} q_l^2 + \sum_{l=1}^N \sum_{m < l} A_{lm} q_l q_m. \quad (1.2)$$

Вектор параметров ФММ \vec{Q} через параметры ИММ выражается в виде

$$\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{u}, \vec{B}), \quad (1.3)$$

а значит ФММ может быть представлена символически следующим образом:

$$y = y(\vec{B}, \vec{u}). \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.4) с (1.1), видим, что в ФММ отсутствуют фазовые переменные. По определению [6], преобразование модели в модель с меньшим числом переменных или ограничений, дающую приближенное по сравнению с исходным описание изучаемого объекта или процесса, называется агрегированием. Таким образом, ФММ является агрегированной по отношению к (1.1).

Задачами оптимального проектирования объекта на моделях (1.1) и (1.4) будем называть следующие:

$$\max_{u \in U} Y_j(\vec{B}, \vec{x}, \vec{u}), \quad L(\vec{B}, \vec{X}) = 0; \quad (1.5)$$

$$\max_{u \in U} y(\vec{B}, \vec{u}). \quad (1.6)$$

Допустим, что задача (1.6) решена при всевозможных значениях вектора \vec{B} , что позволяет построить аппроксимационные зависимости

$$y^{onm} = y^{onm}(\vec{B}), \quad \vec{u}^{onm} = \vec{u}^{onm}(\vec{B}), \quad (1.7)$$

содержащие информацию о всевозможных оптимальных проектах. Модель (1.7) является агрегированной по отношению к (1.4) и (1.5). То же самое можно было бы произвести и с ИММ: в силу решения уравнений модели исчезли бы фазовые, а благодаря оптимизации – управляющие переменные. Однако обычно эта задача слишком сложна для численного решения.

Приближенное решение может быть достигнуто с помощью дезагрегирования, т.е. отображения пространства переменных агрегированной модели в пространство ИММ. Подставляя (1.7) в (1.1), получим:

$$Y_j = Y_j(\vec{B}, \vec{x}, \vec{u}^{onm}(\vec{B})), \quad L(\vec{B}, \vec{X}) = 0,$$

откуда находятся \vec{x}^{opt} и Y_j^{opt} решением уравнений ИММ. Например, в задаче оптимального проектирования турбинной решетки [4] критерием качества является коэффициент потерь энергии, ИММ – уравнения движения идеального газа и пограничного слоя на профиле, фазовыми переменными – параметры потока, управляющими – форма профиля, шаг решетки и др. На практике вместо ИММ расчета потерь используются различные эмпирические методы, по существу являющиеся ФММ вила (1.7), поскольку при их создании учитывается информация не о любых, а лишь о наилучших («оптимальных») на данный момент решетках профилей. На вышестоящих уровнях проектирования, таким образом, используется информация о коэффициентах потерь лишь аэродинамически совершенных профилей.

Описанный подход может быть применен к многоуровневому проектированию сложной системы.

1.2. Метод оптимизации сложных технических устройств

Реализуемое при создании сложных технических устройств блочно-иерархическое представление процесса проектирования [5] приводит к задачам такой сложности, которые могут быть решены современными вычислительными средствами, а результаты решения – поняты и проанализированы специалистами. Обычно иерархия задач проектирования формируется по функциональному принципу и для турбоустановки может иметь вид, изображенный на рис.1.1.

Однотипность математических моделей подсистем одного уровня и их локальных критериев оптимальности дают возможность организовать процесс многоуровневого проектирования, обеспечивающий максимум глобального критерия качества всей системы, в нашем случае – турбоустановки. Этот процесс основан на идее так называемой аппроксимационной схемы многоуровневой оптимизации, которая предполагает агрегирование математических моделей подсистем при движении по иерархии снизу вверх и дезагрегирование с учетом результатов оптимизации при движении сверху вниз.



Рис. 1.1. Иерархия задач проектирования турбоагрегатов

Задача оптимизации параметров подсистемы, описываемой ИММ, имеет вид (1.5). Она может решаться методами нелинейного программирования или оптимального управления в зависимости от вида уравнений ИММ и критерия оптимальности.

Рассмотрим последовательность решения иерархии задач оптимизации параметров системы. Входные параметры подсистемы k -го уровня формируются из числа внутренних и внешних параметров подсистемы вышестоящего $(k-1)$ -го уровня. Обратная связь осуществляется за счет влияния выходных параметров подсистемы k -го уровня \vec{B}_{k-1}'' , по отношению к подсистеме $(k-1)$ -го являющихся внешними. Полный вектор внешних параметров $(k-1)$ -го уровня, таким образом, состоит из вектора внешних

параметров \vec{B}'_{k-1} , приходящего с вышестоящего уровня, и векторов \vec{B}''_{k-1} нижестоящих подсистем (рис.1.2).

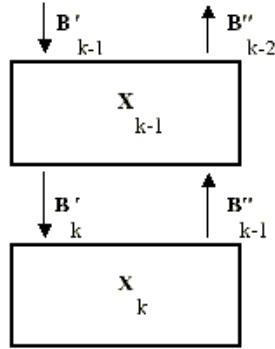


Рис. 1.2. Соседние уровни иерархии задач оптимизации

Двигаясь снизу вверх, решаем задачи вида (1.6) на каждом k -м уровне при всевозможных значениях вектора внешних параметров, поступающих с вышестоящего уровня. При этом фазовые переменные k -го уровня исключаются из числа внутренних параметров модели $(k-1)$ -го уровня в силу уравнений, описывающих подсистему k -го уровня, а управляющие – в результате оптимизации. Таким образом, на каждый вышестоящий уровень передается информация не обо всех, а лишь об оптимальных проектах подсистем низшего уровня:

$$\vec{B}''_{k-1} = \vec{Y}^{onm}_k(\vec{B}'_k). \quad (1.8)$$

На самом верхнем, 1-м уровне, из задачи (1.4) находятся выходные параметры, предопределяющие внешние параметры подсистем 2-го уровня, что дает возможность восстановить оптимальные параметры 2-го уровня, решая ту же задачу (1.4). Этот процесс дезагрегирования продолжается до самого нижнего уровня, в результате чего определяются все оптимальные параметры подсистем, составляющих сложную техническую систему.

Практически реализовать описанную схему удается с использованием ФММ подсистем. В терминах ФММ задача (1.4) записывается в виде, подобном (1.6):

$$\max_{u_k \in U_k} y_k(\vec{u}_k, \vec{B}_k'), \quad (1.9)$$

откуда непосредственно следует

$$\vec{B}_{k-1}'' = y_k^{onm}(\vec{B}_k'), \quad (1.10)$$

что совершенно аналогично (1.8), однако обладает тем преимуществом, что представляет собой известный полином вида (1.2).

Методика, основанная на использовании ФММ отличается тем, что прежде чем начать решать задачи оптимизации на $(k-1)$ -м уровне, ее ИММ заменяется на ФММ с учетом соотношения (1.9). Схема многоуровневой оптимизации, использующая ФММ, является весьма гибкой, позволяя при необходимости менять постановки оптимизационных задач на любом из уровней за счет изменения составляющих векторов $\vec{Q}_k(\vec{u}_k, \vec{B}_k')$.

1.3. Построение ФММ подсистем и численные методы решения локальных задач оптимизации

Как отмечалось, ФММ является некоторой аппроксимацией исходной модели, а значит, может быть получена статистической обработкой результатов численного эксперимента с использованием ИММ. Трудоемкость решения уравнений исходной модели заставляет минимизировать количество пробных точек, что практически достигается использованием методов теории планирования эксперимента. Получить функцию отклика в виде (1.2) можно, в частности, на основании трехуровневых планов Бокса и Бенкина [7], разработанных для N , равного 3 ... 7, 9 ... 12 и 16. Специальным выбором пробных точек на границах области аппроксимации

$$-1 \leq q_l \leq 1, \quad l = 1, \dots, N \quad (1.11)$$

и в ее центре удастся в соответствии с методом наименьших квадратов получить значения коэффициентов (1.2), не прибегая к численному решению нормальных уравнений.

Количество пробных точек колеблется от 13 при $N=3$ до 385 при $N=16$.

При создании ФММ критериев качества подсистем функции \vec{Q}_k следует учитывать, что на нижестоящих уровнях возрастает степень детализации описания объектов проектирования, что приводит к росту размерности векторов \vec{Q}_k . Если размерность превышает допустимую ($N=16$) или каким-либо причинам ограничивается, например, ввиду сложности ИММ, она может быть снижена заменой ряда компонент вектора управляющих параметров определенными законами их изменения по номерам однотипных подсистем рассматриваемого уровня проектирования. Например, при формальном макро моделировании экономичности проточной части многоступенчатой турбины может оказаться целесообразным изменять степени реактивности, располагаемые теплоперепады и пр. по линейному закону от ступени к ступени. Для обеспечения информационной согласованности между ФММ смежных уровней в число компонент вектора \vec{Q}_{k+1} обязательно следует включить параметры, однозначно определяющие положение подсистем в пространстве параметров вышестоящего k -го уровня.

После получения универсальной модели типа (1.2) приступаем к численному решению локальных задач оптимизации (1.6), в систему ограничений которых входят условия (1.11). Даже если других ограничений нет, при невыпуклой целевой функции (1.2) имеется несколько экстремумов на границе допустимой области, что вызывает известные трудности при использовании методов нелинейного программирования. Предлагается эвристический метод поиска оптимальных решений, представляющий собой релаксационный метод с аналитическим определением оптимальных координат вдоль направления поиска. Для определения глобального экстремума задача (1.6) решается, начиная с множества точек, определяемых матрицей планирования эксперимента.

Оптимальные зависимости вида (1.7) строятся аналогично.

1.4. Оптимизация параметров проточной части осевой турбины

Актуальной является задача оптимизации параметров многоступенчатой проточной части, сложность которой состоит, прежде всего, в высокой размерности вектора управляющих переменных и плохой обусловленности целевой функции. Оптимизация методами нелинейного программирования в этих условиях сталкивается с вычислительными трудностями, проявляющимися в плохой сходимости к оптимальному решению. Кроме того, не исключена многоэкстремальность целевой функции. Эти обстоятельства заставляют искать альтернативные подходы к решению задачи оптимального проектирования многоступенчатой турбины.

Применим изложенный метод оптимизации сложных технических систем к проектированию проточной части, который включает в себя четыре нижних уровня иерархии задач проектирования турбоустановки (рис.1.1). В качестве глобального критерия оптимальности примем мощность цилиндра, локальные критерии оптимальности нижестоящих подсистем – соответственно мощности отсека, ступени и КПД турбинных решеток.

Рассмотрим ряд постановок задач оптимизации проточной части турбины с использованием одномерной модели течения рабочего тела.

На основании ИММ нижнего уровня оценивается влияние формы профилей на потери трения в решетках ступени.

ИММ третьего уровня служат для расчета мощности турбинной ступени на основе обратной задачи, предполагающей решение уравнений одномерного движения рабочего тела в осевых зазорах с учетом потерь энергии от трения в решетках, утечек в надбандажный и диафрагменный зазоры, потерь на трение и вентиляцию, от влажности и пр.

Система уравнений, описывающих одномерное стационарное течение рабочего тела в ступени турбины включает в себя уравнения энергии, неразрывности, процесса, состояния, записываемые в расчетных сечениях проточной части.

С их помощью решается обратная задача расчета ступени при заданных параметрах на входе в ступень P_0^* , i_0^* , противодавлении

P_2 , средних диаметрах и высотах лопаток в сечениях, частоте вращения, расходе рабочего тела и степени реактивности. Кроме того, необходимо знать ряд параметров ступени, позволяющих оценить потери в решетках по методике [8] и дополнительные потери энергии. Предполагается закрутка венцов по закону $c_\mu r = const$. Порядок расчета ступени в такой постановке хорошо известен и излагается, в частности, в [9].

Оператор $L(\vec{B}, \vec{X}) = 0$ для этого уровня, таким образом, определен.

ИММ второго уровня позволяет рассчитать мощность отсека как сумму мощностей, вырабатываемых ступенями с учетом взаимного влияния последних.

С помощью ИММ верхнего уровня определяется мощность цилиндра, равная сумме мощностей отсеков; при этом параметры рабочего тела на входе в последующий отсек согласуются с результатами расчета последней ступени предыдущего отсека и количеством отобранного за ней рабочего тела.

Параметры ИММ подсистем согласно (1.1) следующие:

1-й уровень

$$\vec{Y}_1 = \{N_u, \eta_u, \dots\}, \quad \vec{B}_1 = \{P_{01j}^*, i_{01j}^*, G_{ij}, P_{2nj}\},$$

$$\vec{x}_1 = \{i_{ij}, S_{ij}, \dots\}, \quad \vec{u}_1 = \{D_{cp1ij}, D_{cp2ij}, l_{1ij}, l_{2ij}\}$$

2-й уровень

$$\vec{Y}_2 = \{N_{omc}, \eta_{omc}, \dots\}, \quad \vec{B}_2 = \{\vec{B}_1, \vec{u}_1\}$$

$$\vec{x}_2 = \{P_{0i}^*, i_{0i}^*, \dots\}, \quad \vec{u}_2 = \{R_i, P_{2i}, n\}.$$

3-й уровень

$$\vec{Y}_3 = \{N_{cm}, \eta_{cm}, \dots\}, \quad \vec{B}_3 = \{P_0^*, i_0^*, P_2, R, G_0, D_{cp1}, l_1, \dots\},$$

$$\vec{x}_3 = \{c_1, w_1, c_2, w_2, \dots\}, \quad \vec{u}_3 = \{z_1, z_2\}.$$

4-й уровень

$$\vec{Y}_4 = \{\varphi^2\}, \quad \vec{B}_4 = \{\beta_1, \beta_2, \Delta i, w_1, w_2, t, b, t_l, \dots\},$$

$$\vec{x}_4 = \{w(s), \delta^{**}(s), \dots\}.$$

Компоненты вектора \vec{u}_4 представляют собой параметры, описывающие форму обводов профилей решеток.

Поскольку положение турбинного цилиндра в пространстве параметров турбоагрегата практически однозначно определяется вектором \vec{B}_1 , все его компоненты введем в вектор \vec{Q}_1 . Для учета влияния управляющих параметров на мощность цилиндра включим в число его компонент следующие параметры вектора \vec{u}_1 : D_{cp11} , D_{cp2n} и l_{11} . Значения средних диаметров промежуточных ступеней будем определять линейной интерполяцией, а высоты лопаток – на основании уравнения неразрывности в соответствии с законом изменения удельного объема пара вдоль цилиндра. Возможны и другие варианты представления параметров вектора \vec{u}_1 в \vec{Q}_1 : например, с введением высоты рабочей лопатки последней ступени l_{2n} , высоты остальных лопаток определяются линейной интерполяцией; вместо D_{cp11} и D_{cpn} можно использовать корневой диаметр цилиндра $D_{корн}$. Остановимся на следующем варианте вектора \vec{Q}_1 :

$$\vec{Q}_1 = \{\vec{B}_1, D_{cp11}, l_{11}, l_{2n}\}$$

При формировании вектора \vec{Q}_2 для оценки положения отсеков в пространстве параметров цилиндра используем параметры пара на входе в отсек и за его последней ступенью, а также средние диаметры и высоты лопаток соответственно его первой и последней ступеней. При включении управляющих параметров второго уровня в вектор \vec{Q}_2 учитывается, что наибольшими отличиями параметров P_2 и R характеризуется первая и последняя ступени отсека [2]. Поэтому поиск P_2 и R промежуточных ступеней отсека следует заменить нахождением оптимального закона их изменения от ступени к ступени

$$P_{2i} = P_2(i), \quad R_i = R(i),$$

что не только снизит размерность оптимизационной задачи второго уровня, но и повысит вероятность получения высокотехнологичной конструкции.

Варьирование параметрами P_{2i} будет осуществляться трансформацией законов изменения теплоперепадов ступеней, определяемых по статическим параметрам, на линии $S = S_0 = const$.

Для нахождения оптимальных условий работы ступеней в отсеках в вектор \vec{Q}_2 необходимо включить также и число ступеней в отсеке.

С учетом изложенного вектор параметров ФММ второго уровня будет иметь следующий вид:

$$\vec{Q}_2 = \{P_{01j}^*, i_{o1j}^*, D_{cp11j}, D_{cp2nj}, l_{11j}, l_{2nj}, R_{1j}, R_{(n-1)j}, \Delta \bar{h}_{1j}, \Delta \bar{h}_{omcj}, n_j\}$$

где $\Delta \bar{h}_{1j}$ - относительная величина изменения теплоперепада по статическим параметрам 1-й ступени j -го отсека;

$\Delta \bar{h}_{omcj}$ - коэффициент линейного закона изменения теплоперепадов промежуточных ступеней.

Значения степеней реактивности промежуточных ступеней определяются линейной интерполяцией внутри соответствующего диапазона изменения этого параметра в ФММ.

При формировании вектора \vec{Q}_3 ряд параметров представлен в безразмерном виде:

$$\vec{Q}_3 = \{P_0^*, i_0^*, u/C_0, c_{0z}/u, R, l_1/b_1, l_2/b_2, D_{cp1}/l, D_{cp1}, \alpha_0, t_1/b_1, t_2/b_2\},$$

что позволяет расширить область адекватности ФММ.

В связи с отсутствием простой и надежной методики оценки влияния формы профиля на экономичность турбинных решеток была использована эмпирическая методика [8], полученная

статистической обработкой результатов исследований высокоэкономичных решеток турбомашин, и процесс агрегирования ИММ четвертого уровня упростился до создания ФММ КПД турбинных решеток как функции параметров \vec{B}_4 [10].

Описанный вариант схемы рассчитан на формирование оптимальной формы меридиональных обводов проточной части цилиндра (1-й уровень), поиск оптимального числа ступеней отсеков, распределения располагаемых теплоперепадов отсеков между ступенями и выбор степеней реактивности ступеней (2-й уровень), а также определение оптимальных значений относительных шагов или при заданных значениях хорд-чисел лопаток и рабочих решеток (3-й уровень).

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТУРБОМАШИН

2.1. Аэродинамические модели

2.1.1 Моделирование осесимметричного течения в ступени осевой турбины

Воспользуемся следующими допущениями, являющимися общими как при анализе работы группы турбинных ступеней, так и отдельной ступени:

1. Течение установившееся относительно вращающегося с постоянной угловой скоростью ω около оси z рабочего колеса или неподвижного направляющего аппарата.
2. Жидкость сжимаемая ($\rho \neq const$), невязкая и нетеплопроводная. Эффект от вязких сил учитывается в виде возврата теплоты в уравнениях энергии и процесса (неизоэнтروпийного), т.е. потери на трение учитываются энергетически.
3. В случае реального рабочего тела (влажный пар) рассматривается равновесный процесс расширения.
4. Течение осесимметричное, т.е. параметры потока не зависят от φ .

В этих предположениях система уравнений, описывающая установившееся осесимметричное течение сжимаемой жидкости, включает в себя:

1. Уравнение движения в относительной системе координат в форме Крокко [11]

$$\begin{aligned} -\vec{W} \times [\nabla \times \vec{W}] + 2\vec{\omega} \times \vec{W} = \\ = T\nabla S - \nabla H + \vec{F} + \vec{f} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $H = i + W^2/2 - u^2/2$ - ротальпия;

\vec{F} - лопаточная сила;

$\vec{f} = -\vec{W} \frac{T}{W^2} (\vec{W}, \Delta S)$ - сила трения.

2. Уравнение неразрывности

$$\nabla(\chi \rho \vec{W}) = 0, \quad (2.2)$$

где χ - коэффициент стеснения.

3. Уравнение процесса или систему уравнений, описывающую процесс

$$\left. \begin{aligned} (1 - \psi^2)(H + u^2/2) - i + \psi^2 i_T = 0; \\ S_{ex} - S_T(P, i_T) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

4. Уравнения состояния

$$T = T(P, i); \rho = \rho(P, i); S = S(P, i). \quad (2.4)$$

5. Уравнение поверхности тока

$$(\vec{W}, \vec{n}) = 0, \quad (2.5)$$

где \vec{n} - нормаль к поверхности S_2 [12] (рис.2.1).

6. Уравнение ортогональности лопаточной силы к поверхности тока

$$[\vec{n}, \vec{F}] = 0 \quad (2.6)$$

Проекция вихря в относительном движении $rot \vec{W} = \nabla \times \vec{W}$ определяются при помощи нижеприведенных формул:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \vec{W} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rW_u)}{\partial z} \right); \\ \text{rot}_u \vec{W} &= \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r}; \\ \text{rot}_z \vec{W} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rW_u)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) проекции уравнения движения (2.1) на оси цилиндрической системы координат запишутся следующим образом:

- на ось r (уравнение радиального равновесия):

$$\begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} - W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) - 2\omega W_u = \\ = T \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial r} + F_r + f_r \end{aligned} \quad (2.8)$$

- на ось u :

$$\frac{W_r}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + 2\omega W_r = F_u + f_u; \quad (2.9)$$

- вместо проекции на ось z будем использовать уравнение сохранения энергии [11]:

$$\partial H / \partial \mathcal{S} = 0. \quad (2.10)$$

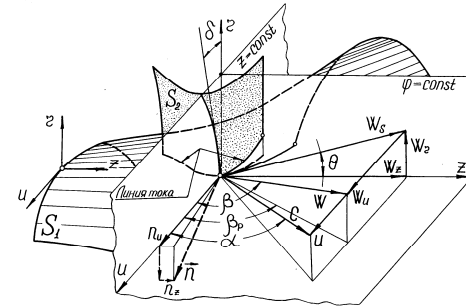


Рис. 2.1. Поверхности тока трехмерного относительного движения, углы потока и составляющие скорости.

Составляющие относительной скорости с учетом обозначенных углов потока (рис. 2.1) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} W_z &= W_s \cos \theta = W \sin \beta \cos \theta; \\ W_u &= W_s \operatorname{ctg} \beta = W \cos \beta; \\ W_r &= W_s \sin \theta = W \sin \beta \sin \theta; \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Из условия $[\vec{n}, \vec{F}] = 0$ имеем:

$$n_r F_u = n_u F_r, n_z F_u = n_u F_z, n_z F_r = n_r F_z.$$

Выразим отношения проекций нормали через углы потока (рис. 2.2):

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{n_r}{n_u}; \operatorname{tg} \theta = -\frac{n_z}{n_r}; \operatorname{ctg} \beta_p = \frac{n_z}{n_u};$$

Тогда можно записать

$$F_r = -\operatorname{tg} \delta \cdot F_u, F_z = -\operatorname{ctg} \beta_p \cdot F_u; F_z = -\operatorname{tg} \theta \cdot F_r; \quad (2.12)$$

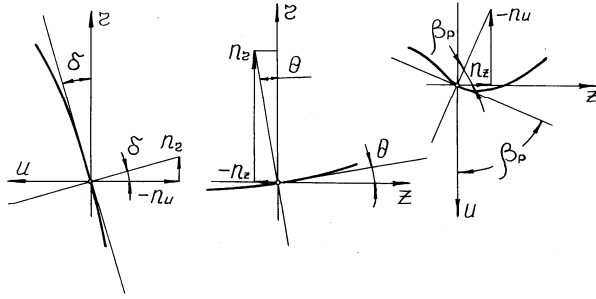


Рис. 2.2. Проекция нормали к поверхности S_2 .

Преобразование уравнения радиального равновесия.

Используя связь между координатами z, r , и s, r в меридианной

плоскости $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\cos \theta} (\partial / \partial s - \sin \theta \partial / \partial r)$, а также соотношения

(2.11), второй член уравнения радиального равновесия (2.8) может быть преобразован:

$$W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) = W_s^2 \left(\mathfrak{K} \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \ln W_s}{\partial s} - \frac{\partial \ln W_s}{\partial r} \right), \quad (2.13)$$

где $\mathfrak{K} = \partial \theta / \partial S$.

Для определения члена $\partial \ln W_s / \partial S$ воспользуемся уравнением неразрывности для осесимметричного течения:

$$\frac{\partial(r\rho\chi W_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\rho\chi W_z)}{\partial z} = 0; \quad (2.14)$$

которое с помощью (2.11) и связывающих соотношений между цилиндрической системой координат z, r и координатами s, n в естественной сетке (линией тока в меридианной плоскости s и нормали к ней n)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial S} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial n} \sin \theta, \\ \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial S} \sin \theta - \frac{\partial}{\partial n} \cos \theta \end{aligned}$$

преобразовывается к виду [13]

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial S} \ln(\chi r \rho W_s) = 0$$

Последнее выражение в свою очередь путем перехода от координат s, n к координатам s, r легко преобразовывается в выражение:

$$\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(r \operatorname{tg} \theta)}{\partial r} - \mathfrak{K} \operatorname{tg} \theta + \frac{\partial \ln \chi}{\partial S} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial S} + \frac{\partial \ln W_s}{\partial S} = 0, \quad (2.15)$$

так как

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\partial \theta}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial S} \right] = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \mathfrak{K} \operatorname{tg} \theta$$

Для определения члена $\partial \ln \rho / \partial S$ привлечем уравнение энергии (2.10), где согласно (2.1) и рис. 2.1

$$H = i + \frac{C^2}{2} - uC_u = i + \frac{C_u^2}{2} + \frac{W_s^2}{2} - uC_u = const$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial i}{\partial S} + C \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial(uC_u)}{\partial S} = \\ & = \frac{\partial i}{\partial S} + W_s^2 \frac{\partial \ln W_s}{\partial S} + C_u \frac{\partial C_u}{\partial S} - \frac{\partial(uC_u)}{\partial S} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выражение для $\partial i / \partial S$ определяется несколько разными путями, в зависимости от того имеем мы дело с идеальным или реальным рабочим телом (о чем речь пойдет ниже).

Первый член уравнения (2.8) с учетом (2.11), а также рис. 2.1 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} &= -\frac{W_s^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{r} - W_s \operatorname{ctg}^2 \beta \frac{\partial W_s}{r} - \frac{W_s^2}{2} \frac{\partial \operatorname{ctg}^2 \beta}{\partial r}; \\ -\frac{W_u}{r} \frac{\partial(rW_u)}{\partial r} &= -\frac{C_u r - \omega r^2}{r^2} \frac{\partial(C_u r)}{\partial r} + 2\omega \frac{C_u r - \omega r^2}{r} \end{aligned}$$

Уравнение радиального равновесия (2.8) может быть теперь преобразовано к форме:

при заданном $C_u r$ (обратная задача):

$$\begin{aligned} & W_s^2 \left(\operatorname{tg} \theta \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \ln W_s}{\partial S} - \frac{\partial \ln W_s}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{C_u r - \omega r^2}{r^2} \frac{\partial(C_u r)}{\partial r} = T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial r} + F_r + f_r; \end{aligned} \quad (2.17)$$

в межвенцовом зазоре (свободном канале):

$$\begin{aligned} & W_s^2 \left(\operatorname{tg} \theta \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \ln W_s}{\partial S} - \frac{\partial \ln W_s}{\partial r} \right) = \\ & - \frac{C_u r - \omega r^2}{r^2} \frac{\partial(C_u r)}{\partial r} + T \frac{\partial S}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial r}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

при заданном β :

$$W_s^2 \left[\mathfrak{K} \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \ln W_s}{\partial \mathcal{S}} - \frac{\text{ctg}^2 \beta}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{ctg}^2 \beta}{\partial r} - (1 + \text{ctg}^2 \beta) \frac{\partial \ln W_s}{\partial r} \right] - \\ - 2\omega W_s \text{ctg} \beta = T \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} - \frac{\partial H}{\partial r} + F_r + f_r \quad (2.19)$$

Проекция уравнения движения на окружное направление.

Рассмотрим теперь проекцию уравнения движения (2.1) на окружное направление (2.9). Используя соотношения (2.11), а также связь между координатами z, r и s, r в меридианной

плоскости $\partial/\partial z = \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right)$, уравнение (2.9) преоб-

разуется:

для случая заданного $C_u r$ (обратная задача):

$$F_u = \frac{W_s}{r} \frac{\partial (C_u r)}{\partial \mathcal{S}} - f_u; \quad (2.20)$$

в зазоре (свободном канале):

$$\frac{\partial (C_u r)}{\partial \mathcal{S}} = 0; \quad (2.21)$$

при заданном β :

$$F_u = W_s^2 \left(\frac{\sin \theta \text{ctg} \beta}{r} + \frac{\partial \text{ctg} \beta}{\partial \mathcal{S}} + \frac{\partial \ln W_s}{\partial \mathcal{S}} \text{ctg} \beta \right) + 2\omega W_s \sin \theta - f_u; \quad (2.22)$$

Эти уравнения позволяют определить проекцию лопаточной силы на окружное направление F_u . Радиальная составляющая F_r легко выражается через окружную согласно (2.12): $F_r = -\text{tg} \delta \cdot F_u$.

Проекция силы трения на оси координат. Выражение для

силы трения $\vec{f} = -\vec{W} \frac{T}{W^2} (\vec{W}, \nabla S)$ можно преобразовать, используя

выражение (2.11) и связывающие соотношения между цилиндрической системой координат z, r и координатами s, r :

$$\vec{f} = -\frac{\vec{W}}{W} \sin \beta T \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s}, \quad (2.23)$$

откуда получаем проекции силы трения на оси координат:

$$f_r = -\sin^2 \beta \sin \theta \cdot T \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s};$$

$$f_u = -\sin \beta \cos \beta \cdot T \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s}$$

Уравнение неразрывности целесообразно использовать в виде $d\psi = \frac{dG}{2\pi} = \chi r \rho W_s dn$, или, используя очевидное соотношение $dn = dr \cos \theta$ (рис. 2.3), будем иметь:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r \rho W_s \cos \theta \cdot \chi \quad (2.24)$$

Для ступени газовой турбины рабочее тело можно считать идеальным газом, для которого уравнения процесса и состояния принимают простые выражения. Из уравнения процесса для идеального газа (1.10) $i \sigma^{k-1} \cdot \rho^{1-k} = \text{const}$ получаем

$$\frac{\partial i}{\partial s} = a^2 \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial s} - \frac{\partial \ln \sigma}{\partial s} \right), \quad (2.25)$$

где $a^2 = (k-1)i = kRT$ - квадрат местной скорости звука.

Подставляя (2.25) в (2.16), решая (2.16) и (2.15) как систему линейных уравнений с неизвестными $\partial \ln W_s / \partial s$ и $\partial \ln \rho / \partial s$, получим при заданном $C_u r$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln W_s}{\partial s} = & \frac{1}{1-M_s^2} \left[\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial (r \tan \theta)}{\partial r} - \chi \tan \theta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \ln \chi}{\partial s} - \frac{C_u}{a^2} \frac{\partial C_u}{\partial s} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial (u C_u)}{\partial s} + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial s} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Заметим, что

$$C_u \frac{\partial C_u}{\partial S} = \frac{C_u}{r} \frac{\partial(C_u r)}{\partial S} - \frac{C_u^2}{r} \sin \theta, \quad (2.27)$$

так как $\partial r / \partial S = \sin \theta$, $M_S = W_S / a$.

Для межвенцового зазора из проекции уравнения движения в абсолютной системе координат на окружное направление получаем, что циркуляция $C_u r = \text{const}$ вдоль меридианной линии тока: $\partial(C_u r) / \partial S = 0$.

Тогда для свободного канала ($\chi = 1,0$) из (2.26) имеем:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln W_S}{\partial S} = \frac{1}{1 - M_S^2} & \left[\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(r \tan \theta)}{\partial r} - \tan \theta + \right. \\ & \left. + \frac{(C_u r)^2}{a^2 r^3} \sin \theta + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial S} \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.1.2. Постановка задачи теплового расчета газовой и паровой осевой турбинной ступени по сечениям в зазорах и методы ее решения.

Рассмотренная выше в общей постановке задача расчета осесимметричных течений сжимаемой жидкости в проточной части осевых турбин может быть упрощена и сведена к задаче расчета по зазорам, подробно рассмотренной в [14]. Расчет по зазорам является частным случаем предлагаемой общей осесимметричной задачи, а коэффициенты A_j в случае идеального газа совпадают с полученными в [14]. В рассматриваемом частном случае течение в осевом зазоре рассматривается при изложенных ранее основных предложениях. Кроме того следует заметить, что в пределах осевого зазора: в свободном от лопаток пространстве $\chi = 1$; из-за малой его протяженности в осевом направлении энтропия S не меняется вдоль меридианных линий тока (т.е. $\partial S / \partial s = 0$); можно пренебречь составляющими сил $F_r = f_r = 0$; поток сохраняет направление движения, сообщенное ему лопатками (т.е. задан угол потока β).

В принятых предположениях уравнение радиального равновесия будет отличаться от (2.19) отсутствием в правой части F_r и f_r :

$$W_s^2 \left[\mathfrak{K} \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \ln W_s}{\partial s} - \frac{ctg^2 \beta}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial ctg^2 \beta}{\partial r} - \right. \\ \left. - (1 + ctg^2 \beta) \frac{\partial \ln W_s}{\partial r} \right] - 2\omega W_s ctg \beta - T \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad (2.29)$$

Модель ступени газовой турбины. Выражение для $\partial \ln W_s / \partial s$ в соответствии с (2.28) примет вид:

$$B = - \frac{\partial \ln W_s}{\partial s} = \frac{1}{1 - M_s^2} \left[\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial (rtg \theta)}{\partial r} - \mathfrak{K} tg \theta + \frac{(C_U r)^2}{a^2 r^3} \sin \theta \right] \quad (2.30)$$

Проделявая аналогично вышеизложенному преобразования уравнения радиального равновесия (2.29) и уравнения неразрывности, приходим в расчетных сечениях к нелинейной задаче

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \psi} &= \frac{1}{r \rho W_s \sin \tilde{\theta}}, \\ \frac{dW_s}{d\psi} &= - \frac{1}{A_1} \left(A_2 + \frac{A_3}{W_s} + \frac{A_4}{W_s^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

с граничными условиями $\ell(0) = \ell_{вн}, \ell(\psi^*) = \ell_{\bullet}$. Коэффициенты A_j в этом случае, как указывалось ранее, совпадают с полученными в [14] и определяются с помощью выражений:

$$A_1 = r \rho (1 + ctg^2 \beta) \cos \theta; \quad (2.32)$$

$$A_2 = B \left[\sin \theta + \frac{\cos \tilde{\alpha}}{\sin \tilde{\theta}} (1 + ctg^2 \beta) \right] - \mathfrak{K} \cos \theta + \frac{ctg^2 \beta}{r} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial (ctg^2 \beta)}{\partial r} + \frac{k-1}{2k} (1 + ctg^2 \beta) \frac{\partial \ln \sigma}{\partial r}; \quad (2.33)$$

$$A_3 = 2\omega \operatorname{ctg} \beta - r\rho \cos \theta \frac{\partial H}{\partial \psi}; \quad (2.34)$$

$$A_4 = -\frac{k-1}{k} \left[H + \frac{u^2}{2} \right] \frac{\partial \ln \sigma}{\partial r} \quad (2.35)$$

Следует заметить, что для рассматриваемого случая коэффициенты A_j также можно получить путем упрощения соответствующих коэффициентов [15].

Приведем подробно системы уравнений, описывающих течение в контрольных радиальных ($\tilde{\alpha} = 90^\circ$) сечениях турбинной ступени. Переход к новой независимой переменной ψ согласно (2.24) осуществляется с помощью соотношения:

$$d/dr = r\rho W_s \cos \theta d/d\psi.$$

За направляющим аппаратом. Для неподвижного венца ($\omega=0$), оперируя с абсолютной скоростью и углами в абсолютном движении, помня, что в этом случае $H = i_0^*$, для коэффициентов A_j из (2.32)-(2.35) получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= r_1 \rho_1 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_1) \cos \theta_1 \\ A_2 &= B_1 \sin \theta_1 - \mathfrak{K} \cos \theta_1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha_1}{r_1} + \frac{1}{2} \frac{d(\operatorname{ctg}^2 \alpha_1)}{dr_1} + \\ &+ \frac{k-1}{2k} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_1) r_1 \rho_1 C_{1s} \cos \theta_1 \frac{d \ln \sigma_1}{d\psi} \\ A_3 &= -r_1 \rho_1 \cos \theta_1 \frac{di_0^*}{d\psi} \\ A_4 &= -\frac{k-1}{k} i_0^* r_1 \rho_1 C_{1s} \cos \theta_1 \frac{d \ln \sigma_1}{d\psi} \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Чтобы избавиться от производной $d \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 / dr_1$, запишем уравнение радиального равновесия (2.29) относительно скорости C , а система уравнений с учетом (2.24), (2.30), (1.10), (1.3), (1.11) в сечении за направляющим аппаратом примет вид:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dr_1}{d\psi} &= \frac{1}{r_1 \rho_1 C_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1}; \\
\frac{dC_1}{d\psi} &= -\frac{\sin \alpha_1}{r_1 \rho_1 \cos \theta_1} \times \left(B_1 \sin \theta_1 - \mathfrak{K}_1 \cos \theta_1 + \frac{ctg^2 \alpha_1}{r_1} \right) + \\
&+ \frac{1}{C_1} \left(\frac{di_0^*}{d\psi} + \frac{k-1}{k} i_1 \frac{d \ln \sigma_1}{d\psi} \right)
\end{aligned} \right\} (2.37)$$

$$B_1 = \frac{1}{1-M_{1S}^2} \left[\frac{\cos \theta_1}{r_1} \frac{d(r_1 tg \theta_1)}{dr_1} - \mathfrak{K}_1 tg \theta_1 + \frac{(C_{1U} r_1)^2}{a_1^2 r_1^3} \sin \theta_1 \right];$$

$$\rho_1 = \sigma_1 \rho_0^* \left(\frac{i_1}{i_0^*} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \sigma_1 = \left[\frac{1-C_1^2/(2\varphi^2 i_0^*)}{1-C_1^2/(2i_0^*)} \right]^{\frac{k}{k-1}};$$

$$i_1 = i_o^* - C_1^2/2; a_1 = (k-1)i_1$$

Граничные условия:

$$r_1(0) = r_{1\theta H}; r_1(\psi^*) = r_{1H}$$

За рабочим колесом путем аналогичным вышеизложенным преобразованиям, помня, что $H = i_0^* - u_1 C_{1U} = i_2 + W_2^2/2 - u_2^2/2$ получаем:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dr_2}{d\psi} &= \frac{1}{r_2 \rho_2 W_2 \sin \beta_2 \cos \theta_2}; \\
\frac{dW_2}{d\psi} &= -\frac{\sin \beta_2}{r_2 \rho_2 \cos \theta_2} \left(B_2 \sin \theta_2 - \mathfrak{K}_2 \cos \theta_2 + \frac{ctg^2 \beta_2}{r_2} \right) + \\
&+ \frac{2\omega tg \beta_2}{\sin \beta_2 W_2} + \frac{1}{W_2} \left[\frac{di_0^*}{d\psi} - \frac{d(u_1 C_{1U})}{d\psi} + \frac{k-1}{k} i_2 \frac{d \ln \sigma_2}{d\psi} \right];
\end{aligned} \right\} (2.38)$$

$$B_2 = \frac{1}{1-M_{2S}^2} \left[\frac{\cos \theta_2}{r_2} \frac{d(r_2 tg \theta_2)}{dr_2} - \mathfrak{K}_2 tg \theta_2 + \frac{(C_{2U} r_2)^2}{a_2^2 r_2^3} \sin \theta_2 \right];$$

$$\rho_2 = \sigma_2 \rho_0^* \left(\frac{i_2}{i_0^*} \right)^{\frac{1}{k-1}}; \sigma_2 = \sigma_1 \left[\frac{1 - W_2^2 / (2\psi^2 i_{2W}^*)}{1 - W_2^2 / (2i_{2W}^*)} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$i_2 = i^* - u_1 C_{1U} + u_2^2 / 2 - W_2^2 / 2; a_2^2 = (k-1) i_2$$

$$i_{2W}^* = i_0^* - u_1 C_{1U} + u_2^2 / 2$$

Граничные условия:

$$r_2(0) = r_{2\text{вн}}; r_2(\psi^*) = r_{2\text{н}}$$

Модель ступени паровой турбины. Для вычисления выражения $\partial \ln W_s / \partial s$ воспользуемся уравнением (3.60):

$$\frac{\partial \ln W_s}{\partial s} = \frac{1}{\left[1 - W_s^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial i} \right) \right]} \times \left[\varkappa \operatorname{tg} \theta - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial (r \operatorname{tg} \theta)}{\partial r} - \right.$$

$$\left. - \frac{C_U^2 r^3}{r^3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\partial \ln \rho}{\partial i} \right) + T \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right] \quad (2.39)$$

Уравнение радиального равновесия (2.29), записанное относительно скорости W (что позволяет избавиться от производной $\partial \operatorname{tg}^2 \beta / \partial r$), перейдя к новой независимой переменной ψ с помощью соотношения $d/dr = r \rho W_s \cos \theta d/d\psi$, принимает вид

$$\frac{dW}{d\psi} = - \frac{\sin \beta}{r \rho \cos \theta} \left(B \sin \theta - \varkappa \cos \theta + \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega \operatorname{tg} \beta}{\sin \beta W} \right) + \frac{1}{W} \left(\frac{dH}{d\psi} - T \frac{dS}{d\psi} \right) \quad (2.40)$$

Уравнение неразрывности, как известно, записывается следующим образом:

$$dr/d\psi = 1/(r \rho W \sin \beta \cos \theta) \quad (2.41)$$

Таким образом, как и в случае ступени газовой турбины, течение в зазоре ступени паровой турбины описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (2.40), (2.41) с граничными условиями $r(0) = r_{\text{вн}}; r(\psi^*) = r_{\text{н}}$. Величины $B = -\partial \ln W_s / \partial s$ определяются с помощью (2.41), энтальпия согласно уравнению энергии. Для вычисления температуры, плотности и энтропии по формулам (2.4) необходимо знать кроме значения энтальпии i также давление P , которое при некотором W находится из второго уравнения (2.3):

$$S_{\text{ex}} = S_{\text{T}} \left\{ P, \left[(H + u^2/2) - W^2 / (2\psi^2) \right] \right\} \quad (2.42)$$

Следовательно, системы уравнений, описывающих течение пара в зазорах осевой турбинной ступени имеют следующий вид:

за направляющим аппаратом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_1}{d\psi} &= \frac{1}{r_1 \rho_1 C_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1}; \\ \frac{dC_1}{d\psi} &= -\frac{\sin \alpha_1}{r_1 \rho_1 \cos \theta_1} \times \left(B_1 \sin \theta_1 - \mathfrak{K}_1 \cos \theta_1 + \frac{ctg^2 \alpha_1}{r_1} \right) + \\ &+ \frac{1}{C_1} \left[\frac{di_0^*}{d\psi} + T_1 \frac{dS_1}{d\psi} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

$$B_1 = -\partial \ln W_{1s} / \partial s; i_1 = i_0^* - C_1^2 / 2; T_1 = T_1(i_1, P_1);$$

$$\rho_1 = \rho_1(i_1, P_1); S_1 = S_1(i_1, P_1); S_0^* = S_{1T} \left(P_1, i_0^* - \frac{C_1^2}{2\varphi^2} \right)$$

Граничные условия

$$r(0) = r_{\text{вн}}; r(\psi^*) = r_{\text{н}}.$$

за рабочим колесом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_2}{d\psi} &= \frac{1}{r_2 \rho_2 W_2 \sin \beta_2 \cos \theta_2}; \\ \frac{dW_2}{d\psi} &= -\frac{\sin \beta_2}{r_2 \rho_2 \cos \theta_2} \left(B_2 \sin \theta_2 - \mathfrak{K}_2 \cos \theta_2 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta_2}{r_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega \operatorname{ctg} \beta_2}{\sin \beta_2 W_2} \right) + \frac{1}{W_2} \left[\frac{di_0^*}{d\psi} - \frac{d(u_1 C_{1U})}{d\psi} + T_2 \frac{dS_2}{d\psi} \right]; \end{aligned} \right\} (2.44)$$

$$B_2 = -\partial \ln W_{2S} / \partial s; i_2 = i_0^* - u_1 C_{1U} + u_2^2 / 2 - W_2^2 / 2;$$

$$T_2 = T_2(i_2, P_2); \rho_2 = \rho_2(i_2, P_2); S_2 = S_2(i_2, P_2);$$

$$S_1 = S_{2T}(P_2, i_{2W}^* - W_2^2 / (2\psi^2)); i_{2W}^* = i_2 + W_2^2 / 2$$

Граничные условия:

$$r_2(0) = r_{2вн}; r_2(\psi^*) = r_{2н}$$

Численная реализация задачи теплового расчета ступени.

Математические модели ступеней осевых паровых и газовых турбин, рассмотренные выше, позволяют производить их расчет при задании некоторых дополнительных (замыкающих) соотношений, например, распределения углов β или α (прямая задача), величин C_{ur} , ρC_z и др. (обратная задача) [14]. В данном параграфе будет рассмотрена прямая задача, так как поставленная нами конечная цель - задача оптимизации решается с ее привлечением. Такой подход к оптимальному проектированию ступеней с учетом пространственного течения рабочего тела основывается на целом ряде соображений, о которых будет сказано ниже.

Для решения прямой задачи расчета ступени по зазорам требуется задание следующей информации:

-форма меридианных обводов ступени, т.е. наружные и внутренние радиусы в расчетных сечениях;

-скорость вращения ротора ω ,

-параметры торможения на входе в ступень P_0^* и i_0^* ;

-геометрические характеристики лопаток: углы входа и выхода, а также их количество в венце, хорды, толщины кромок и другие параметры, необходимые для расчетного определения коэффициентов скорости по длине лопатки [8];

-углы наклона линий тока θ и их кривизна κ в расчетных сечениях;

-в случае принимаемых значений коэффициентов скорости - их распределение по высоте лопатки.

Различают, как указывается в [14], две разновидности прямой задачи: с заданным расходом G и с заданным противодавлением P_2 .

Решение задачи с фиксированным расходом G проще, поскольку интегрирование уравнений (2.37), (2.38) и (2.43), (2.44) производится при известном значении $\psi^* = G/2\pi$ и математически формулируется как двухточечная краевая задача для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{d\psi} &= f_1(\psi, W, r), \\ \frac{dr}{d\psi} &= f_2(\psi, W, r), \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

с граничными условиями: $r(0) = r_{\text{вн}}; r(\psi^*) = r_{\text{н}}$. Правые части уравнений (2.45) вычисляются согласно формулам одной из систем уравнений (2.37), (2.38) или (2.43), (2.44).

На решение накладывается требование положительности функции W (условие безотрывного течения).

Из физических соображений известно [14], что краевая задача (2.45) может иметь либо два решения, соответствующих до- и сверхзвуковому режиму течения, либо одно, либо вовсе не иметь решения.

Одним из способов решения задачи (2.45) является сведение ее к нахождению корня трансцендентного уравнения, служащего для подбора недостающего граничного условия у корня $W(0) = W_{\text{вн}}$. Действительно, задав некоторое граничное условие $W_{\text{вн}}$ и проинтегрировав (2.45) как задачу Коши с начальными условиями $r(0) = r_{\text{вн}}, W(0) = W_{\text{вн}}$, получим при ψ^* приближенное значение

наружного радиуса $r(0) = \tilde{r}$. Рассматривая \tilde{r}_n как функцию $W_{вн}$ приходим к уравнению с одним неизвестным $W_{вн}$:

$$\tilde{r}(W_{вн}) - r_n = 0 \quad (2.46)$$

Таким образом, для решения прямой задачи расчета ступени с заданным расходом требуется решать систему трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r}_{1n}(C_{1вн}) &= r_{1n} \\ \tilde{r}_{2n}(C_{1вн}, W_{2вн}) &= r_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Решение задачи (2.47) производится в два этапа: сначала решается первое уравнение и находится распределение параметров потока в межвенцовом зазоре, затем, зная параметры на входе в рабочее колесо можно решить второе уравнение системы. То есть, задача сводится к определению корней уравнения с одним неизвестным для каждого из двух уравнений (2.47). Для вычисления дозвуковых решений системы (2.47) с успехом можно использовать методы нелинейного программирования. Система (2.47) решается путем последовательной минимизации невязок

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^2 &= [\tilde{r}_{1n}(C_{1вн}) - r_{1n}]^2 \\ \Delta_2^2 &= [\tilde{r}_{2n}(W_{2вн}) - r_{2n}]^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

с помощью одного из методов одномерного поиска экстремума, описанных в [16] ("золотого сечения", ДСК-Пауэлла и др.).

Решение задачи с заданным противодавлением P_2 (расход неизвестен) несколько сложнее. Для определения неизвестного расхода G к системе уравнений (2.47) необходимо добавить еще одно - ограничение на перепад.

Противодавление можно задать различными способами, например:

$$P_{2\text{ ср}} = P_{2\text{ ср. задан}} \text{ или } C_{ф\text{ ср}} = C_{ф\text{ ср. задан}}, \quad (2.49)$$

где $P_{2\text{ ср. задан}}$ и $C_{ф\text{ ср. задан}}$ - статическое давление за ступенью и скорость, эквивалентная располагаемому теплоперепаду на сту-

пень, соответственно, полученные одномерным расчетом по среднему радиусу.

В рассматриваемой постановке задачи представляется целесообразным задать и усредненные по расходу параметры в соответствии с формулами

$$\int_0^{\psi^*} P_2 d\psi = \psi^* P_{2cp.задан.} \quad \text{или} \quad \int_0^{\psi^*} C_{\phi cp}^2 d\psi = \psi^* C_{\phi cp.задан.}^2 \quad (2.50)$$

С учетом одного из условий (2.49), (2.50) для расчета ступени с заданным противодавлением требуется решать систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 &= h(C_{1вн}, W_{2вн}, \psi^*) - h_0 = 0; \\ \Delta_1 &= \tilde{r}_{1*} (C_{1вн}, \psi^*) - r_{1н} = 0; \\ \Delta_2 &= \tilde{r}_{2*} (C_{1вн}, W_{2вн}, \psi^*) - r_{2н} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

На практике для решения системы (2.51) используется метод последовательных приближений, заключающийся в подгонке расхода под заданное противодавление [14].

Реализованная на ЭВМ программа может решать систему уравнений (2.51) двумя способами. Первый из них реализует последовательные приближения, аналогичные вышеприведенным и описанные в [14], только решение двухточечных задач (последние два уравнения (2.51)) производится минимизацией квадратов невязок и внешний цикл итераций (определение ψ^* из первого уравнения системы (2.51)) осуществляется минимизацией квадрата невязки Δ_0^2 . Второй способ заключается в минимизации суммы квадратов невязок

$$I^* = \Delta_0^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2 \quad (2.52)$$

по трем переменным $C_{1вн}$, $W_{2вн}$, ψ^* одним из методов многомерного поиска экстремума [16].

Составленная математическая модель, описывающая течение в осевых зазорах турбомашин (уравнения (2.37), (2.38) и (2.43), (2.44)), позволяет рассчитывать и сверхзвуковые течения (в том числе и с переходом через скорость звука), у которых $M_3 < 1$, т.е. в

случае меридиональной составляющей скорости меньше скорости звука. Указанному условию удовлетворяют все существующие ступени мощных паровых турбин.

Расчет сверхзвуковых ступеней обязательно должен производиться с заданным противодавлением, в противном случае не обеспечивается единственность решения уравнения вида (2.45). В то же время система трансцендентных уравнений (2.51) относительно переменных $C_{1вн}$, $W_{2вн}$, ψ^* в отличие от (2.47) имеет единственный корень.

Другой особенностью расчета сверхзвуковых ступеней является необходимость учета отклонения потока в косом срезе при числах Маха, больших единицы. Для этой цели можно использовать способ определения угла отклонения потока в косом срезе, заключающийся в приравнении расхода в горловом сечении лопатки и за ней.

В данном случае для вычисления невязок уравнений (2.48), (2.51) нужно интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.45), а конкретно (2.37), (2.38) или (2.43), (2.44). Эти уравнения ввиду сложности вида правых частей в общем случае могут быть проинтегрированы только численно. Правые части систем уравнений, описывающих течение в ступени газовой турбины, вычисляются непосредственно по формулам (2.37), (2.38). При интегрировании (2.43), (2.44) следует иметь в виду, что на каждом шаге давление должно определяться путем решения уравнения вида (2.42), что существенно усложняет задачу.

Заметим, наконец, что из-за наличия в правых частях систем (2.37), (2.38) нелинейного члена $\partial \ln \sigma / \partial \psi$, а в правых частях (2.43), (2.44) члена $T \partial S / \partial \psi$ эти системы, вообще говоря, нельзя считать записанными в форме Коши, так как указанные нелинейные добавки являются некоторыми функциями W_2 или C_1 , r и их производных. При интегрировании эти члены определяются последовательными приближениями.

Важнейшим моментом является выбор численного метода интегрирования систем вида (2.45). Обширный опыт в области решения подобных задач свидетельствует о возможности разбиения интервала интегрирования на небольшое число участков интегрирования (порядка 5-10) [17, 11, 14]. Методы интегрирования для

указанных уравнений применяются различные. При этом достижимая точность находится в противоречии с простотой алгоритма и требуемым для решения временем. Особенно остро вопрос времени решения в задачах оптимизации, где требуется многократное интегрирование уравнений, имеющих правые части весьма сложного вида. В результате численного эксперимента по сравнению различных методов интегрирования предпочтение было отдано модифицированному методу Эйлера [18], точность которого находится на уровне метода последовательных приближений, однако скорость расчета в 1,5...2 раза выше.

2.1.3. Упрощенный метод определения наклона и кривизны линий тока вдоль радиуса в сечениях перед и за рабочим колесом

Расчет протечек необходимо вести совместно с пространственным расчетом ступени, по результатам которого определяются параметры по высоте в расчетных сечениях, в том числе и на меридианных границах проточной части.

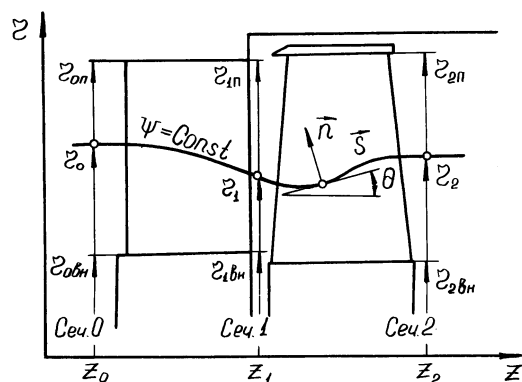


Рис. 2.3. Меридианная проекция осевой турбинной ступени. Обозначения используются при расчете ступени по упрощенной методике.

Пропускная способность ступени зависит от величины зазоров (или перетечек), в связи с чем расчет основного потока производится с уточнением расхода при фиксированных начальных параметрах и противодавлении на среднем радиусе, или с уточнением противодавления при фиксированных начальных параметрах и расходе. Необходимость многократных пространственных расчетов параметров ступени (в задаче оптимизации количество прямых пространственных расчетов увеличивается во много раз) потребовала создания менее трудоемкой, но хорошо отражающей действительную картину течения, методики пространственного расчета ступени. Суть этой методики заключается в расчете ступени по зазорам, дополненным алгоритмом уточнения наклона и кривизны линий тока в расчетных сечениях (рис. 2.3).

При расчете ступени с учетом протечек уравнение неразрывности удобно брать в виде [14]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \mu r \rho W_s \cos \theta, \quad (2.53)$$

где μ - коэффициент массообмена, позволяющий учесть изменение количества жидкости, проходящей через венцы, и в то же время решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений в сечениях перед и за рабочим колесом как бы с постоянным расходом.

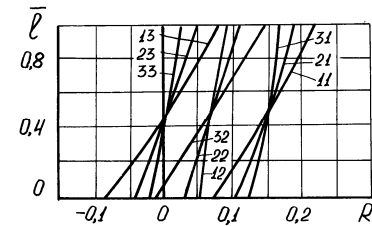


Рис. 2.4. Расчетное распределение степени реактивности в серии ступеней с $D_{cp}/\ell = 19$ [19].

Как было показано, расчет пространственного потока в ступени при известной в некотором приближении форме линий тока сводится к решению в сечениях $z_1 = \text{const}$ и $z_2 = \text{const}$ (рис. 2.3) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.43) и

(2.44), у которых в качестве независимой переменной взята функция тока ψ . Таким образом, уравнения, описывающие течение в осевых зазорах, представляются в виде:

- в сечении за направляющим аппаратом:

$$\begin{aligned} dr_1/d\psi &= f_{11}(\psi, r_1, C_1), dC_1/d\psi = f_{12}(\psi, r_1, C_1), \\ r_1(0) &= r_{1\text{вн}}, r_1(\psi^*) = r_{1\text{н}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

- в сечении за рабочим колесом:

$$\begin{aligned} dr_2/d\psi &= f_{21}(\psi, r_1, C_1, r_2, W_2), \\ dW_2/d\psi &= f_{22}(\psi, r_1, C_1, r_2, W_2), \\ r_2(0) &= r_{2\text{вн}}, r_2(\psi^*) = r_{2\text{н}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Как указывалось ранее, решение краевых задач (2.54), (2.55) при заданном расходе сводится к независимому нахождению корней двух трансцендентных уравнений (2.47) относительно корней скоростей $C_{1\text{вн}}, W_{2\text{вн}}$.

При заданном противодавлении к числу определяемых величин добавляется расход ψ^* и задача сводится к решению системы трех уравнений. В качестве третьего уравнения добавляется ограничение на тепловой перепад ступени (2.50), которое можно символически записать в виде

$$h(C_{1\text{вн}}, W_{2\text{вн}}, \psi^*) - h_0 = 0$$

Системы уравнений решаются с использованием методов нелинейного программирования.

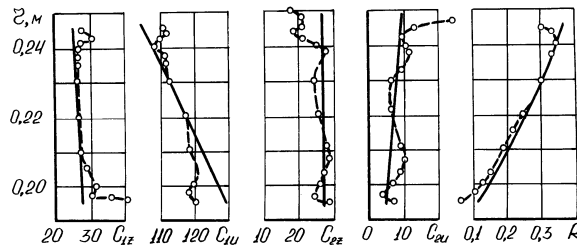


Рис. 2.5. Расчетное (—) и экспериментальное (----o----) распределение параметров в зазорах ступени М1 с $D_{\text{ср}}/\ell = 8,3$ [20].

Приближенный способ уточнения формы меридианных линий тока по их координатам в трех расчетных сечениях заключается в построении интерполяционного кубического сплайна при заданных наклонах на границах проточной части [21]. С целью ускорения сходимости кривизна линии тока уточняется с использованием нижней релаксации. Опыт расчетов показал, что интерполяционный процесс сходится с достаточной точностью за 3...5 приближений.

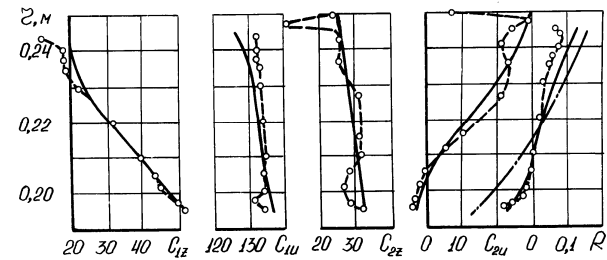


Рис. 2.6. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени P3 с $D_{cp}/\ell = 8,3$ [20]: — • — расчет по цилиндрической теории.

Уточнение расходов через венцы осуществляется параллельно с построением линий тока. Разработан универсальный алгоритм, позволяющий решать прямую задачу пространственного расчета ступени по зазорам в различных постановках, с заданными или уточняемыми в процессе расчета линиями тока, коэффициентами скорости и расхода венцов, при различных способах задания углов по высоте проточной части, для совершенного газа или водяного пара. Алгоритм проверялся путем сравнения результатов расчета с точными решениями, а также с экспериментальными данными, полученными для большого числа ступеней воздушных турбин на кафедре турбиностроения ХГПУ [15]. Результаты расчетов и экспериментов иллюстрируют рис. 2.4-2.12. Следует констатировать хорошее совпадение с экспериментом результатов расчетов для ступеней с различным втулочным отношением, отличающихся формой меридианных обводов, законами закрутки лопаток и уровнем степени реактивности на среднем радиусе. Наибольшие сложности для расчета представляют ступени с резким раскрытием проточной

части (рис. 2.12), а также цилиндрические ступени с обратной закруткой направляющего аппарата (рис. 2.4, 2.6 - 2.8).

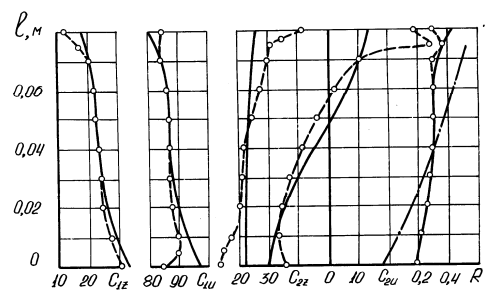


Рис. 2.7. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени 41 (таблица 1.1) с $D_{cp}/\ell = 5,13$ [20]; — • — - расчет по цилиндрической теории.

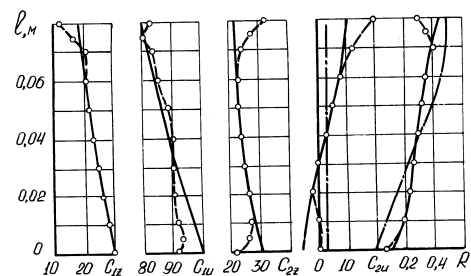


Рис. 2.8. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени 42 (таблица 1.1) с $D_{cp}/\ell = 5,13$ [20]; — • — - расчет по цилиндрической теории.

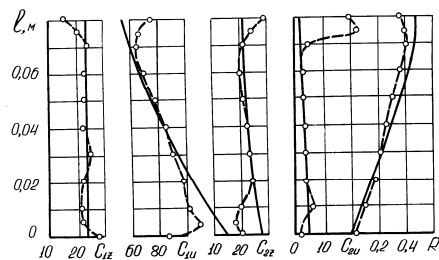


Рис. 2.9. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени 32 (таблица 1.1) с $D_{cp}/\ell = 5,13$ [22].

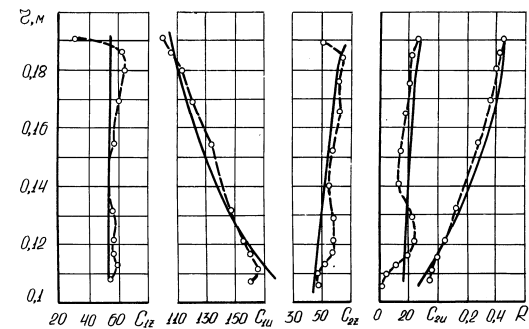


Рис. 2.10. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени I с $D_{cp}/\ell = 3,6$ (опыты авторов).

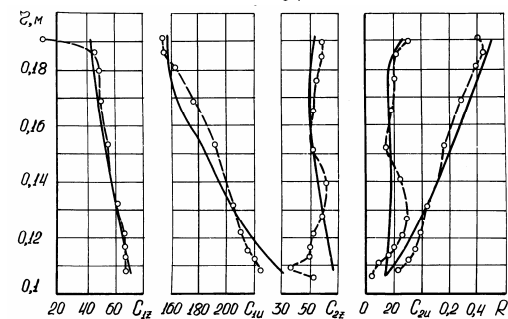


Рис. 2.11. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени II с $D_{cp}/\ell = 3,6$ (опыты авторов).

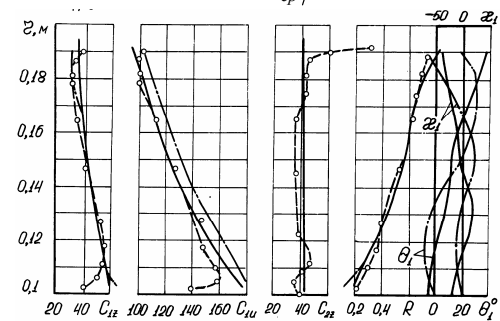


Рис. 2.12. Расчетное (—) и экспериментальное (---o---) распределение параметров в зазорах ступени 33 с $D_{cp}/\ell = 3,2$ [23]; —•— расчет в полной осесимметричной постановке.

Расчет ступеней с обратной закруткой по предлагаемой методике позволяет получить действительный градиент степени реактивности и окружной составляющей скорости за ступенью, в то время как расчет при условии цилиндричности течения дает результаты значительно отличающиеся от данных эксперимента (рис. 2.6 - 2.8). Методика позволяет учесть также и влияние закона закрутки рабочего колеса на распределение параметров в межвенцовом зазоре ступени. Об этом свидетельствует сравнение ступеней 41 и 42 (рис. 2.7, 2.8) с одинаковыми сопловыми аппаратами, первая из которых имеет цилиндрическое рабочее колесо, а вторая - закрученное по закону постоянной циркуляции. Из рис. 2.12 видно, что расчет по предлагаемой методике дает результаты для углов наклона и кривизны линий тока, близкие к получаемым решениям в полной осесимметричной постановке [15]. В то же время методика требует значительно меньших затрат машинного времени.

2.1.4. Расчет течения рабочего тела через плоские решетки

Для проектирования высокоэкономичных проточных частей осевых турбин важно иметь достоверные, надежные и быстрые методы расчета обтекания плоских решеток профилей и потерь трения на поверхности профиля.

При расчетах дозвуковых течений идеальной жидкости в плоских решетках широкое распространение получил подход, основанный на сведении системы уравнений в частных производных к интегральному уравнению Фредгольма 1-го или 2-го рода [15]. Имеющиеся численные реализации решения этих уравнений сталкиваются с рядом проблем, не позволяющих с достаточной степенью надежности или точности рассчитывать решетки произвольной конфигурации. Например, долгое время использовавшийся нами метод расчета [15] сводился к решению интегрального уравнения второго рода относительно потенциала скорости. Он позволил решить ряд важных практических задач оптимизации решеток, однако имел важные недостатки: сложность нормирования ядра интегрального уравнения, что приводило к трудностям при расчетах тонких и сильно изогнутых профилей, а также необходимость численного дифференцирования вычисленных потенциалов, что привносило дополнительную погрешность в эпюру ско-

ростей обтекания. Позднее был разработан метод численного расчета потенциального обтекания плоских решеток профилей идеальным газом с приближенным учетом сжимаемости, основанный на решении уравнения Фредгольма 2-го рода относительно скорости на обтекаемой поверхности, и программа для ПЭВМ, предназначенная для работы в интерактивном режиме. Проведенные вариантные расчеты обтекания решеток различной конфигурации позволили выработать рекомендации по надежному использованию разработанного алгоритма.

Определение потерь трения на профиле осуществляется путем расчета сжимаемых ламинарного, переходного и турбулентного пограничных слоев на основании однопараметрического метода Лойцянского [24]. Для повышения точности получаемых результатов на основании рекомендаций, приведенных в литературе, производится расчет точек потери устойчивости и конца перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный в зависимости от продольного градиента давления, степени турбулентности набегающего потока и степени шероховатости поверхности профиля.

Разработанные алгоритмы расчета течения идеальной жидкости в решетке и пограничного слоя на поверхности профиля дают хорошее качественное и количественное совпадение расчетных и экспериментальных данных для различных типов решеток, при различных углах натекания, относительных шагах, числах Маха и Рейнольдса, характеризуются высоким быстродействием и поэтому пригодны для использования в задачах оптимизации формы лопаток осевых турбомашин.

2.1.5. Автоматизация расчетов проточных частей многоступенчатых паровых турбин на переменных режимах

Постановка задачи

Задача расчета на переменный режим, как известно, заключается в определении газодинамических характеристик при полученных из проектировочного расчета размерах проточной части (ПЧ) и параметрах, определяющих длительный (установившийся) режим работы турбины. Необходимость анализа нерасчетных режимов ПЧ возникает при оценке термогазодинамических, мощностных, прочностных параметров турбины в экстремальных

условиях эксплуатации, при выборе способа регулирования и расчете парораспределения, при проектировании турбин, предназначенных для работы в условиях изменяющихся режимных параметров (частота вращения, нерегулируемые отборы пара и пр.).

Специфика указанных задач требует проведения газодинамических расчетов в прямой постановке, которые более трудоемки, чем расчеты, используемые обычно на стадии проектирования. Известны ручные методы решения прямой задачи (« v^2 - метод», расчет «с конца» и др.) и ориентированные на применение ЭВМ. На практике часто ограничиваются приближенными зависимостями типа формул Стодоль-Флюгеля, которые дают возможность оценить изменение некоторых параметров при отклонении режима работы от расчетного [25], но не учитывают ряда важных факторов: изменение проходных площадей, уровня экономичности и пр.

В связи с этим методы проектирования, рассчитанные на применение ЭВМ с использованием оптимизационных процедур и САПР должны основываться на более точной оценке переменных режимов, причем математическая модель газодинамического проверочного расчета должна удовлетворять ряду требований:

- основываться на уравнениях движения реального рабочего тела в проточной части многоступенчатой турбины;
- учитывать с необходимой точностью влияние геометрических и режимных параметров на коэффициенты потерь в элементах ПЧ;
- позволять вести расчеты с изменяющимся от сечения к сечению расходами рабочего тела;
- быть весьма надежной и экономной с точки зрения потребления ресурсов ЭВМ, т. е. давать возможность осуществлять многовариантные и оптимизационные расчеты.

Для расчета частей высокого, среднего и, в меньшей мере, низкого давления мощных паровых турбин оправдано использование одномерного газодинамического расчета с привлечением уравнений упрощенного радиального равновесия в осевых зазорах, баланса протечек у корня ПЧ диафрагменной конструкции и методики расчета сепарации влаги из проточной части. Учет потерь кинетической энергии и оценка КПД должны проводиться путем последовательных приближений на основании текущих резуль-

татов газодинамического расчета и эмпирических зависимостей, а достоверность результатов – обеспечиваться путем сравнения с результатами экспериментальных исследований и введением необходимых корректировок. Удовлетворительной следовало бы считать точность совпадения расчетных и экспериментальных значений относительных потерь в пределах 5 ... 7% для ПЧ, выполненных с цилиндрическим или закругленным по закону постоянной циркуляции облопачиванием при отсутствии резкого искривления меридианных обводов. При реальных уровнях потерь 10 ... 30% погрешность определения КПД, таким образом, лежит в диапазоне 0.5 ... 2% [15].

Метод расчета

Одномерное установившееся равновесное адиабатическое движение водяного пара в проточной части в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω , отыскивается системой уравнений:

энергии

$$H = i + \frac{w^2 - u^2}{2}; \quad (2.56)$$

неразрывности

$$G = F\rho\tilde{w}_z; \quad (2.57)$$

процесса

$$S_0 - S\left(P, \frac{1}{\Psi^2} \left[i - (1 - \Psi^2) i_w^* \right] \right) = 0; \quad (2.58)$$

состояния

$$Y = Y(P, i); \rho = \rho(p, i); S = S(p, i); \quad (2.59)$$

$$P = P(i, S); i = i(P, S) \text{ и т. д.}$$

связи между кинематическими характеристиками потока.

Решение этой системы уравнений для изолированной осевой турбинной ступени в прямой постановке требует задания:

-энтальпии i_0^* на входе в ступень;

-давления за ступенью $P_{2ад}$;

-угловой скорости вращения ω ;

-средних диаметров расчетных сечений D_{1cp} , D_{2cp} и длин лопаток l_1 , l_2 ;

-эффективных углов выхода решеток $\alpha_{1эф}$, $\beta_{2эф}$;

-данных для оценки коэффициентов скорости решеток: хорд, количества лопаток, толщин кромок, геометрических углов входа решеток и т. д.;

-данных для расчета дополнительных потерь энергии, таких как типы уплотнений и их размеры, величины осевых и радиальных зазоров, количество скрепляющих проволок и т. п.

Две основные постановки предполагают определение расхода G_0 при заданном давлении торможения на входе в ступень P_0^* , либо определение P_0^* при известном расходе. Возможно также решение задачи с заданными одновременно G_0 и P_0^* и изменяющимися углами $\alpha_{1эф}$ или $\beta_{2эф}$, что, в частности, позволяет моделировать сопловые аппараты с поворотными лопатками. Во всех случаях определению подлежат скорости потока c_1 и w_2 .

Далее для определенности будем рассматривать задачу с фиксированным P_0^* и определением расхода. Преобразуем уравнение неразрывности (2.57) за соплом с учетом (2.56), (2.58), (2.59):

$$G = \rho_1 \left(i_0^* - \frac{c_1^2}{2\varphi^2}, S_0^*(P_0^*, i_0^*), i_0^* - \frac{c_1^2}{2} \right) c_1 \sin \alpha_1 F_1 \quad (2.60)$$

с неизвестными c_1 и G .

Аналогично, за рабочим колесом

$$G = \rho_2 \left(P_2 \left(H + \frac{u_2^2}{2} - \frac{w_2^2}{2\Psi^2}, S_1(P_1, i_1) \right), \right. \\ \left. H + \frac{u_2^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right) w_2 \sin \beta_2 F_2, \quad (2.61)$$

где $H = i + \frac{c_1^2}{2} - u_1 c_{1u}$,

$$P_1 = P(i_0^* - \frac{c_1^2}{2\varphi^2}, S_0^*), i_1 = i_0^* - \frac{c_1^2}{2}.$$

В это уравнение входят неизвестные c_1 , G , w_2 .

Под α_1 и β_2 при дозвуковом истечении понимаются эффективные углы решеток, а при сверхзвуковом – углы потока с учетом отклонения в косом срезе по формуле Бэра.

Третье уравнение имеет вид:

$$P_2(H + \frac{u_2^2}{2} - \frac{W_2^2}{2\psi^2}, S_1(P_1, i_1)) = P_{2ад}. \quad (2.62)$$

При известных коэффициентах скорости φ и ψ для определения неизвестных c_1 , G , w_2 имеется три уравнения (2.60) – (2.62), которые в общем виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1(G, c_1) &= 0, \\ g_2(G, c_1, W_2) &= 0, \\ h(G, c_1, W_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Система (2.63) решается численно путем минимизации суммы квадратов невязок

$$g_1^2 + g_2^2 + h^2$$

методом сопряженных градиентов.

Расчет многоступенчатой проточной части методически не отличается от расчета ступени. Уравнение типа (2.63) записывается для каждой из ступеней, что приводит к системе вида

$$\begin{aligned} g_{1j}(G, c_{1j}, c_{1j-1}, \dots, w_{2j-1}, w_{2j-2}, \dots) &= 0, \\ g_{2j}(G, c_{1j}, c_{1j-1}, \dots, w_{2j}, w_{2j-1}, \dots) &= 0, j = 1, \dots, n, \\ h(G, c_{1n}, \dots, c_{11}, w_{2n}, \dots, w_{21}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где j - номер ступени, n - количество ступеней ПЧ.

Численное решение осуществляется минимизацией функции

$$\sum_{j=1}^n (g_{1j}^2 + g_{2j}^2) + h^2$$

по $2n+1$ переменным $c_{1j}, w_{2j}, (j=1, \dots, n), G$.

Расходы в сечениях могут быть различными из-за наличия протечек, теплофикационных или регенеративных отборов пара, сепарации влаги и т. д. В уравнениях (2.64) при этом вместо расхода G в соответствующих сечениях следует брать текущее значение

$$G_k = G_{k-1} + \Delta G_k,$$

где ΔG_k - заданное или уточняемое в итерациях изменение расхода при переходе от $(k-1)$ -го сечения к k -му ($k=1, \dots, 2n$). Неизвестными считается расход G_0 на входе в ПЧ.

После решения системы (2.63) или (2.64) вычисляются все необходимые параметры потока и уточняются коэффициенты потерь и действительные расходы в сечениях. Требуемое количество итераций обычно равно 3...4.

Определение потерь кинетической энергии

Потери, связанные с утечками рабочего тела, рассматриваются отдельно. Остальные составляющие подразделяются на потери в решетках и дополнительные, относимые к перепаду энтальпий на ступень.

Методика оценки потерь в решетках основывается на исследованиях [8, 13, 26, 27] с соответствующей корректировкой эмпирических зависимостей по данным продувок профилей, используемых в отечественном турбиностроении [28, 29].

Следуя [8], фактор потерь в решетке $X = \frac{1-\Psi^2}{\Psi^2}$ представляется в виде суммы факторов профильных X_p и вторичных X_s потерь, которые определяются следующим образом:

$$X_p = X_{pb} \cdot N_{Re} \cdot N_i \cdot N_{iy} \cdot N_t + \Delta x_t + \Delta x_M + \Delta x_y, \quad (2.65)$$

где X_{pb} - базовая профильная потеря;

N_{Re} - поправка на число Рейнольдса;

N_i - поправка на угол атаки;

N_{iy} - поправка на угол атаки, связанная с удлинением входной кромки профиля;

$N_t, \Delta x_t$ - поправки на толщину выходной кромки;

Δx_M - поправка на число Маха при $M > 1$;

Δx_y - поправка, связанная с удлинением входной части профиля при нулевом угле атаки.

$$X_s = X_{sb} N_{Re} N_{b/l} N_\delta, \quad (2.66)$$

где X_{sb} - базовая вторичная потеря;

$N_{b/l}$ - поправка на относительную высоту лопатки;

N_δ - поправка на длину свисающего козырька.

Поправки N_{Re} на число Рейнольдса $Re = \frac{w_2 a}{\nu}$, угол атаки N_i , толщину выходной кромки $N_t, \Delta x_t$, на сверхзвуковое истечение Δx_M без изменений берутся по [8]. Поправка на угол атаки в профилях, снабженных удлинителем входной кромки N_{iy} , оценивается по данным экспериментальных исследований на стандартных сопловых профилях, а влияние удлинителя на профильную потерю Δx_y - по методике ЦКТИ [29]. Базовая составляющая профильной потери X_{pb} получается соответствующей корректировкой уровня графической зависимости [8]. Базовая вторичная потеря определяется по исправленному графику [8], поправка на отношение хорды к высоте лопатки $N_{b/l}$ - по [8], а

коэффициент N_δ , учитывающий длину свисающего козырька за выходными кромками решетки – на основании экспериментальных данных по продувкам стандартных сопловых профилей. При оценке потерь энергии в рабочих лопатках учитывается влияние периодической нестационарности набегающего потока, вызванной наличием закомочных следов предшествующей сопловой решетки, поправкой N_γ . Степень неравномерности набегающего потока берется по [27].

К дополнительным относятся потери энергии на трение диска и вентиляцию, выколачивание, влажность, наличие скрепляющих проволок, а также на трение в открытом и закрытых осевых зазорах в соответствии с рекомендациями [26].

Расчет протечек и потерь от них

Считается, что потери от протечек рабочего тела в зазоры проточной части связаны с уменьшением расхода через венцы, аэродинамическими и термодинамическими потерями смещения с основным потоком, а также отклонением кинематических параметров в зазорах от расчетных.

Для определения термодинамических параметров у образующих проточной части, необходимых для расчета расходов протечек, привлекается упрощенное уравнение радиального равновесия

$$\partial P = \frac{\rho c_u^2}{r} \partial r. \text{ При этом в межвенцовом зазоре считается, что}$$

$$c_u \cdot r = \text{const}, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad \text{а за ступенью} \quad c_{2u} = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const}.$$

Утечка в радиальный зазор равна [27]

$$G_p = F_{\text{экв}} \rho_2 \sqrt{\Delta h_T''},$$

где $F_{\text{экв}}$ - эквивалентная площадь зазора, зависящая от размеров и конструктивного выполнения уплотнения.

Протечки в корневой области многоступенчатой проточной части находятся решением уравнений баланса расходов через диафрагменные, корневые уплотнения и разгрузочные отверстия с учетом зависимости коэффициентов расхода щелей и

коэффициентов трения от режимных и геометрических параметров, изменения давления и закрутки потока в камерах диска вдоль радиуса при наличии расхода рабочего тела и т. д. Оценка протечек на основании расчета одной передней камеры, во-первых, не позволяет корректно сбалансировать расходы вдоль всей ПЧ, а во-вторых, может привести к значительным погрешностям как по расходам протечек, так и осевым усилиям, особенно на нерасчетных режимах. Разработан алгоритм расчета протечек в многоступенчатой ПЧ, в результате которого может быть построена схема протечек в пределах цилиндра с учетом большинства влияющих на них факторов [15]. Расчет смещения основного потока с протечками через надбандажный и корневой зазоры производится на основе системы уравнений баланса расхода, энтальпии и энтропии. Привлечение уравнений количества движения для оценки аэродинамических потерь смещения позволяет при некоторых допущениях учесть влияние на потери смещения угла вдува подсасываемого рабочего тела.

Третья группа факторов потерь, вызываемых наличием протечек, в основном, через изменение коэффициентов скорости решеток, расположенных за зазорами, где происходит смещение, в силу вариации углов натекания.

2.2. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ РАСЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ, ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ

2.2.1 Статистическая оценка геометрических характеристик решеток профилей

Многовариантные проектировочные расчеты лопаточных аппаратов осевых турбин включают в себя и определение прочностных характеристик рассматриваемых вариантов, для оценки которых необходимо решать достаточно сложную и трудоемкую задачу профилирования решеток, что ведет к существенным затратам ресурсов ЭВМ, снижает эффективность проектировочных работ и качество лопаточных аппаратов. В связи с тем, что задача профилирования решеток в данном случае решается только для

оценки зависимых геометрических характеристик профилей (ЗГХП) как функций независимых геометрических характеристик (НГХП), а первые используются в качестве необходимых данных для прочностного расчета лопаточного аппарата, возникает необходимость в получении достоверных статистических зависимостей ЗГХП от НГХП.

Из литературы известны попытки решения аналогичной задачи [30]. Большинство из них основаны на методах регрессионного анализа, обобщающих влияние НГХП на ЗГХП по известным типоразмерам профилей, спроектированных в разное время с помощью различных методик проектирования, что естественно снижает точность известных зависимостей и достоверность получаемых с их помощью данных.

В данной работе статистические зависимости основных ЗГХП получены для класса профилей, спроектированных по геометрическому критерию качества – минимуму максимальной кривизны с использованием степенных полиномов высоких порядков [2], с помощью методики формального макро моделирования. Аппроксимационные зависимости, или формальные макро модели (ФММ) получаются в виде полного квадратичного полинома:

$$y(\vec{q}) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i q_i + \sum_{i=1}^n A_{ii} q_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n A_{ij} q_i q_j; \quad (2.67)$$

здесь A – коэффициенты ФММ, \vec{q} – вектор нормированных значений НГХП.

Значения функций отклика $y(\vec{q})$ (ЗГХП), соответствующее точкам методики формального макро моделирования, вычисляются по математической модели профилирования решеток профилей по геометрическому критерию качества [2].

К ЗГХП относятся: f – площадь; I_e и I_n – минимальный и максимальный моменты инерции; I_u – момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения параллельно оси вращения u ; φ – угол между главной центральной осью инерции минимального момента и осью u ; $X_{цт}$, $Y_{цт}$ – координаты центра тяжести; β_y – угол установки; $l_{кр}$, $l_{сп}$ – расстояние от наиболее удаленных точек кромок и спинки до оси

E ; $l_{вх}$, $l_{вых}$ – расстояния от наиболее удаленных точек кромок до оси N ; $W_{кр}$, $W_{сп}$, $W_{вх}$, $W_{вых}$ – моменты сопротивления профиля.

Значения перечисленных ЗГХП наиболее существенно зависят от следующих НГХП: β_{I_2} – геометрический угол входа; $\beta_{2эфф}$ – эффективный угол выхода; b – хорда; t/b – относительный шаг; r_1 , r_2 – радиусы кромок; ω_1 , ω_2 – углы заострения. При использовании методики формального макро моделирования стремятся уменьшить число НГХП, принимать во внимание только значимые и независимые. В данном случае можно исключить из рассмотрения величины, r_1 , r_2 , ω_2 , приняв их равными $r_1 = 0,03b$; $r_2 = 0,01b$; $\omega_2 = 0,014K_{\omega}\omega_1/(0,2+\omega_1)$, $K=1\dots3$ в зависимости от типа профиля [30].

Анализ используемых в турбиностроении решеток показал, что из оставшихся четырех НГХП два β_{I_2} и t/b сильно коррелированы. Целесообразно вместо этих факторов использовать их аналоги – угол поворота потока в решетке θ и параметр $\Delta t = t/b - T$, где $T = 1,08 - 0,004\theta$ – уравнение линейной регрессии, задающее статистическую связь между относительным шагом и углом поворота потока, полученное в результате обработки данных по типичным турбинным решеткам.

Таким образом, при формальном макро моделировании в качестве НГХП были взяты: θ , $\beta_{2эфф}$, ω_1 , Δt в диапазонах соответственно 20...120, 10...30, 20...30, -0,2...0,2. В нормированном виде в интервале -1...1 факторы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= (\theta - 70)/50, & q_2 &= (\beta_{2эфф} - 20)/10, \\ q_3 &= (\omega_1 - 25)/5, & q_4 &= \Delta t / 0,2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

В процессе макро моделирования были спроектированы 25 турбинных решеток с $b=1$ и значениями НГХП, соответствующими точкам плана численного эксперимента, рассчитаны значения ЗГХП и построены для них зависимости вида (2.67). Расчет эпюр обтекания и коэффициентов потерь подтвердил высокое аэродинамическое качество каждой из 25 спрофилированных решеток.

В направляющих аппаратах высоконагруженных ступеней мощных паровых турбин используются лопатки с удлиненной входной частью. Была разработана методика аналитического про-

филирования таких лопаток, в соответствии с которой на первом этапе по геометрическому критерию качества – минимуму максимальной кривизны с использованием степенных полиномов проектируется исходный профиль, а затем к нему в форме полуэллипса достраивается вытеснитель. Такие профили имеют достаточно высокие аэродинамические качества. Точный расчет ЗГХП, спроектированных в соответствии с этой методикой, использовался при формальном макро моделировании с целью установления зависимостей вида (2.67) для ЗГХП направляющих аппаратов.

В качестве НГХП были взяты β_{I_2} – геометрический угол входа, диапазон изменения: 70...120; r_I – радиус входной кромки исходного профиля, диапазон изменения: $0,05b_{\text{исх}}...0,15b_{\text{исх}}$; $t/b_{\text{исх}}$ – относительный шаг, диапазон изменения: 0,7...1; $B = b/b_{\text{исх}}$ – отношение ширины профиля с вытеснителем к ширине исходного профиля, диапазон изменения: 1...3,5. Нормированные значения факторов вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} q_1 &= (\beta_{I_2} - 95)/25, \quad q_2 = (r_I - 0,1b_{\text{исх}})/(0,05b_{\text{исх}}), \\ q_3 &= (2t/b_{\text{исх}} - 1,7)/0,3, \quad q_4 = (B - 2,25)/1,25. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Учитывая специфику условий, в которых используются профили с удлиненной входной частью, оказалось возможным считать ряд параметров, несущественно влияющих на ЗГХП, и принимать их значения равными: $r_I = 0,01b_{\text{исх}}$; $\omega_2 = 5^\circ$; $\beta_{2\text{эфф}} = 15^\circ$.

По сформированному четырехфакторному плану методики формального макро моделирования были спроектированы 25 решеток направляющих профилей с $b_{\text{исх}} = 1$, оценены точные значения ЗГХП и на их базе получены ФММ для ЗГХП.

В таблицах 2.1...2.6 приведены соответственно коэффициенты ФММ и величины дисперсий ФММ ЗГХП рабочих и направляющих решеток.

В таблицах значения коэффициентов ФММ увеличены в 10^4 .

Таблица 2.1

Коэффициенты макромоделей ЗГХП рабочих лопаток

$A(i, j)$	$\ln(F)$	$\ln(I_e)$	$\ln(I_n)$	$\ln(I_u)$	φ	$\beta_{\text{всг}}$
A(0)	-26530	-87000	-53800	-64034	320	9010
A(1)	4049,2	16769	4241,7	13055	-68,183	-3422,5
A(2)	-45	53,333	37,5	4423,8	-13,683	-1920,8
A(3)	807,5	1200,8	579,17	727,58	-0,5833	-68,333
A(4)	-538,33	-1075	-228,33	-3982,6	83,917	726,67
A(1, 1)	4716,7	6769,2	4024,2	6248,7	-162,02	-1454,6
A(2, 2)	1207,9	2385,4	715,42	1000,2	4,7333	-342,08
A(3, 3)	194,17	711,67	55,418	41,169	-15,867	81,666
A(4, 4)	-204,58	-542,08	-198,33	-1300,1	11,133	186,67
A(1, 2)	562,5	602,5	690	-1472	-120,55	-567,5
A(1, 3)	147,5	-367,5	175	148,5	25,25	-32,5
A(1, 4)	572,5	1412,5	445	1584,8	30,25	-12,5
A(2, 3)	342,5	552,5	180	53	21	-40
A(2, 4)	810	2520	522,5	3917,8	-91,5	-400
A(3, 4)	-7,5	52,5	-2,5	-36,75	-2	12,5

Таблица 2.2

Коэффициенты макромоделей ЗГХП рабочих лопаток

$A(i, j)$	$X_{\text{ЦТ}}$	$Y_{\text{ЦТ}}$	$l_{\text{кр}}$	$l_{\text{сп}}$	$l_{\text{вх}}$	$l_{\text{вых}}$
A(0)	2927	5540	1371	882	3726	6090
A(1)	1090,1	-213,75	1093,8	635,14	-63,5	165,75
A(2)	976,42	-657,33	-25,508	-31,008	157,42	-99,667
A(3)	49,417	2,0833	9,2333	47,708	-23,5	26
A(4)	-344,75	237,83	23,558	-32,825	-84,25	61,75
A(1, 1)	433,04	-399,42	324,87	405,3	237,33	-207,75
A(2, 2)	14,292	-135,04	93,692	142,72	-1,2918	-9,8752
A(3, 3)	-30,708	48,583	15,58	19,396	-5,668	9,8748
A(4, 4)	-65,958	34,958	-22,688	-29,929	20,042	18,5
A(1, 2)	-68,75	-500	4,275	51,4	227,5	-241,5
A(1, 3)	19,5	4,75	31,05	29,6	-24,25	19
A(1, 4)	38,5	118	61,825	61,375	-40,25	44,75
A(2, 3)	-5	-10	25,75	22,425	1,5	-3,5
A(2, 4)	192	8,5	79	90,8	35,25	-13,5
A(3, 4)	-6,75	12	5	1,6	5,25	5

Таблица 2.3

Дисперсии макромоделей ЗГХП
рабочих лопаток

ЗГХП	Дисперсия
$\ln(F)$	0,0038
$\ln(I_e)$	0,023
$\ln(I_n)$	0,046
$\ln(I_u)$	0,05
φ	0,000021
$\beta_{уст}$	0,00029
$X_{ЦГ}$	0,000065
$Y_{ЦГ}$	0,000053
$l_{кр}$	0,000053
$l_{сп}$	0,00005
$l_{вх}$	0,000032
$l_{вых}$	0,000075

Таблица 2.4

Дисперсии макромоделей ЗГХП
направляющих лопаток

ЗГХП	Дисперсия
$\ln(F)$	0,0017
$\ln(I_e)$	0,091
$\ln(I_n)$	0,018
$\ln(I_u)$	0,02
φ	0,015
$\beta_{уст}$	0,0005
$X_{ЦГ}$	0,00012
$Y_{ЦГ}$	0,00014
$l_{кр}$	0,00077
$l_{сп}$	0,00064
$l_{вх}$	0,0054
$l_{вых}$	0,00036
b	0,0002

Таблица 2.5

Коэффициенты макромоделей ЗГХП направляющих лопаток

$A(i, j)$	$\ln(F)$	$\ln(I_e)$	$\ln(I_n)$	$\ln(I_u)$	φ	$\beta_{уст}$
A(0)	-19646	-65719	-45431	-51569	7284	7903
A(1)	-277,84	-6506,9	3376,4	-1414,7	296,58	1562,1
A(2)	4478,5	5582,5	3081,1	-5543,9	-737,33	-404,75
A(3)	-1252,8	-1312,8	-2444,4	-3442,3	1150,7	835,42
A(4)	6969,6	17063	12073	19535	-2977,6	-2755,3
A(1, 1)	642,63	2744,6	-156,4	1680,1	587,5	-395,33
A(2, 2)	-346,16	-662,79	713,83	2925,8	-784,88	-125,58
A(3, 3)	10,48	-498,54	788,73	3984,1	-472,38	-64,584
A(4, 4)	-376,23	-3706,2	1955,5	-2946,3	459,5	91,584
A(1, 2)	1364,3	3140	2770,3	2951,5	-1050,3	-367
A(1, 3)	1363,3	1041	1858,8	1366,8	-721	-565,5
A(1, 4)	-58	-8201,3	5196,3	-100,25	-1486,5	1354,8
A(2, 3)	333,08	-1034,5	-280,25	1286,3	-733,75	-268,5
A(2, 4)	278,75	-2519,5	1539,8	609,5	-33,5	130,25
A(3, 4)	188	897	-1642,5	-191,5	-378,25	-55,25

Таблица 2.6

Коэффициенты макромоделей ЗГХП направляющих лопаток

$A(i, j)$	$X_{ЦГ}$	$Y_{ЦГ}$	$l_{кр}$	$l_{сп}$	$l_{вх}$	$l_{вых}$	b
A(0)	4051	7228	2772	1892	4267	7755	11840
A(1)	-197,67	614,17	-837,92	-674,26	1467,6	731,17	-228,33
A(2)	555,92	145,08	475,82	381,91	-189,42	263,92	158,33
A(3)	-637,25	166,42	-443,33	-57,333	-757,92	18,833	-717,5
A(4)	2500,5	659	2165,4	1012,7	3065,8	1171,6	4627,5
A(1, 1)	319,42	-9,584	177,99	325,45	-657,71	-51,25	214,17
A(2, 2)	-74,208	-188,71	52,142	-21,079	722,79	-182,88	129,17
A(3, 3)	65,792	-58,709	145,12	-174,62	507,04	4,5	120,42
A(4, 4)	1043,2	188,67	518,52	-157,82	832,54	531,62	2632,9
A(1, 2)	247,25	27	96	-49	5515,75	216,5	355
A(1, 3)	142,75	-97	698,25	254,6	739,5	-387,75	285
A(1, 4)	-88	866,5	-839	-1024,7	2791	972,5	-290
A(2, 3)	111	11,5	125,75	225,5	316,5	15,5	122,5
A(2, 4)	271,5	-97,25	88,3	30,775	284	50,25	357,5
A(3, 4)	-222,5	1,25	29,5	107	-265,75	-183,75	-670

2.2.2 Математическая модель оценки надежности функционирования диафрагм

Для оценки напряженного состояния диафрагм в данной работе используется метод А. М. Валя. Метод прост и дает погрешность не более 10% при расчетах напряжений в теле чугунных и сварных диафрагм [31].

Расчет по методу Валя основан на использовании упрощенной схемы, согласно которой диафрагма рассматривается как полукольцевой стержень (полоса с неизменным поперечным сечением), нагруженный односторонним равномерным давлением и опертый по внешнему криволинейному контуру. Такой подход позволяет оценить максимальные напряжения в диафрагме и является достаточным для оценки прочности диафрагм на стадиях эскизного и технического проектирования.

Максимальное напряжение в теле диафрагмы имеет место на внутреннем контуре в среднем сечении и определяется по Валу формулой:

$$\sigma_T = \pm \frac{pha}{(1 - \nu^2)I} t_T k_\sigma / 2, \quad (2.70)$$

где $I = I_T + I_{об}$,

$$t_T = S_T / (r_2 - r_1),$$

$$a = (r + r_1) / 2,$$

$$h = (r - r_1) / 2,$$

I_T – момент инерции поперечного сечения тела диафрагмы относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести этого сечения перпендикулярно оси турбины,

$I_{об}$ – момент инерции поперечного сечения обода диафрагмы относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести этого сечения перпендикулярно оси турбины,

S_T – площадь поперечного сечения тела диафрагмы,

$S_{об}$ – площадь поперечного сечения обода диафрагмы,

P – перепад давления на диафрагму,

k_σ – коэффициент, определяется по рис. 2.13,

r – наружный радиус диафрагмы,

r_1 – внутренний радиус диафрагмы,

r_2 – внутренний радиус лопаточного венца.

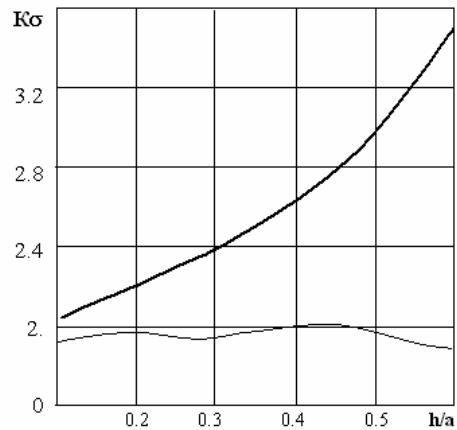


Рис. 2.13. График для определения коэффициента K_σ

Для расчета напряжений в направляющих лопатках выбран упрощенный метод определения напряжений в лопаточном аппарате диафрагм применительно к условиям упругого состояния материала, разработанный В. И. Розенблюмом и В. С. Черниной [32]. Погрешность этого метода находится в тех же пределах, что и

погрешность метода расчета напряжений в теле диафрагмы по А.М. Валу.

Наиболее напряженная – крайняя лопатка, поэтому ее прочность определяет прочность направляющих лопаток диафрагмы в целом. Максимальный изгибающий момент в этой диафрагме, действующий у заделки в тело диафрагмы, равен:

$$M = k_M \frac{Pr}{192}, \quad (2.71)$$

где k_M – коэффициент, определяется по рис. 2.14 в зависимости от значения отношения r_2 / r и углового шага $\Delta\varphi = 180 / Z_n$ (Z_n – количество направляющих лопаток).

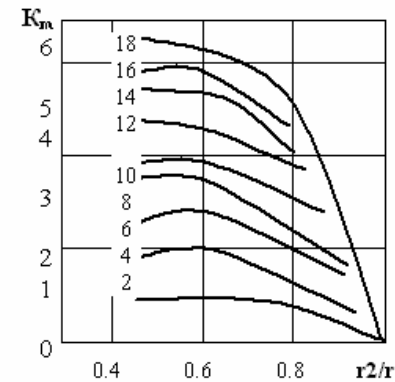


Рис. 2.14. График для определения коэффициента K_m

Напряжения в лопатке на входной и выходной кромках соответственно определяются по формулам:

$$\sigma_{\text{вх}} = -\frac{M}{W_{\text{вх}}}, \quad (2.72)$$

$$\sigma_{\text{вых}} = \frac{M}{W_{\text{вых}}}. \quad (2.73)$$

Сопловые лопатки диафрагм изготавливают преимущественно из сталей 1х13, 1х12ВНМФ, 1х11МФ. Значения пределов текучести

$[\sigma_{02}]_I$ вышеперечисленных материалов занесены в банк данных по сталям, сформированный на основе данных, приведенных в [33].

Условием надежной работы диафрагмы является выполнение неравенства:

$$\max(\sigma_{\text{вх}}, \sigma_{\text{вых}}) < [\sigma]_{\text{доп}}, \quad (2.74)$$

$$\sigma_T < [\sigma_T]_{\text{доп}},$$

где $[\sigma]_{\text{доп}} = \frac{[\sigma_{02}]_I}{k}$,

k – коэффициент запаса прочности, равный 1,6 ... 3 [33].

2.2.3 Математическая модель оценки надежности функционирования рабочих лопаточных венцов

Расчет лопатки на прочность осуществляется по стержневой теории, что позволяет с минимальными затратами машинного времени оценить напряжения растяжения и изгиба.

Для лопаток постоянного сечения максимальное напряжение имеет место в корневом сечении, где суммарные напряжения растяжения определяются центробежными силами (ЦБС) пера лопатки, бандажа и проволочного бандажа:

$$Q_p = (C_l + C_b + C_{np}) / F_l, \quad (2.75)$$

где ЦБС пера лопатки, действующая в корневом сечении лопатки:

$$C_l = (\rho_l \omega^2 D_l F_l t_l) / 2,$$

ЦБС бандажа:

$$C_b = (\rho_b \omega^2 D_b F_b t_b) / 2,$$

ЦБС проволоки:

$$C_{np} = (\rho_{np} \omega^2 D_{np} F_{np} t_{np}) / 2,$$

ρ_l – плотность стали лопатки,

ρ_b – плотность стали ленточного бандажа,

ρ_{np} – плотность стали проволочного бандажа,

D_l – средний диаметр лопаточного венца,

D_b – диаметр центра тяжести ленточного бандажа,

D_{np} – диаметр центра тяжести проволочного бандажа,

F_l – площадь сечения лопатки,
 F_{δ} – площадь сечения ленточного бандаж,
 F_{np} – площадь сечения проволочного бандаж,
 t_{δ} – шаг ленточного бандаж,
 t_{np} – шаг проволочного бандаж,
 ω – угловая скорость вращения ротора.

Лопатку постоянного сечения можно использовать только при условии выполнения неравенства:

$$\sigma_{p \max} < [\sigma]_{\text{доп}}, \quad (2.76)$$

где $[\sigma]_{\text{доп}} = \frac{[\sigma_{02}]_l}{k},$

k – коэффициент запаса прочности (выбирается в соответствии с [34]),

$[\sigma_{02}]_l$ – предел текучести материала при рабочей температуре.

Для турбинных лопаток применяются нержавеющие стали 1х13, 2х13 (при температуре до 550 С°), 15х12ВМФ или ЗИ802 (до 580 С°). Значения $[\sigma_{02}]_l$ для вышеперечисленных сталей занесены в банк данных по сталям.

Если максимальное напряжение растяжения превышает допустимые напряжения, то в этом случае нужно использовать лопатку переменного профиля. Ориентировочная оценка отношения площадей сечений лопатки переменного профиля периферийного (F_n) к корневому (F_k) в данной работе выполняется по формуле [35]:

$$\frac{F_n}{F_k} = 2 \frac{[\sigma]_{\text{доп}}}{\sigma_{p \max}} - 1. \quad (2.77)$$

Кроме напряжений растяжения во вращающейся лопатке имеют место напряжения изгиба. Для расчета напряжений изгиба газовая сила, действующая на лопатку постоянного сечения, представляется двумя составляющими:

- окружной

$$P_u = G (C_{1u} - C_{2u}) / Z_l; \quad (2.78)$$

- осевой

$$P_a = G (C_{1z} - C_{2z}) / Z_n + (P_1 - P_2) t_n l_n. \quad (2.79)$$

Сила, перпендикулярная главной минимальной оси инерции х-х – выражением:

$$P_1 = P_u \cos (\alpha) + P_z \sin (\alpha), \quad (2.80)$$

сила, перпендикулярная главной максимальной оси инерции у-у – выражением:

$$P_2 = P_u \sin (\alpha) - P_z \cos (\alpha). \quad (2.81)$$

Главные изгибающие моменты этих сил:

$$\begin{aligned} M_1 &= P_1 l / 2, \\ M_2 &= P_2 l / 2, \end{aligned} \quad (2.82)$$

где G – расход,

C_{1z} – осевая составляющая входной абсолютной скорости,

C_{2z} – осевая составляющая выходной абсолютной скорости,

C_{1u} – окружная составляющая входной абсолютной скорости,

C_{2u} – окружная составляющая выходной абсолютной скорости,

P_1 – давление на входе в рабочее колесо,

P_2 – давление на выходе из рабочего колеса,

Z_n – количество рабочих лопаток,

t_n – шаг,

l_n – длина рабочей лопатки,

α – угол между минимальной осью инерции и осью параллельной, осевому направлению.

Суммарные напряжения изгиба:

- на входной кромке

$$\sigma_{вхкр} = \frac{M_1}{W_{кр}} - \frac{M_2}{W_{вхкр}}; \quad (2.83)$$

- на выходной кромке

$$\sigma_{выхкр} = \frac{M_1}{W_{кр}} - \frac{M_2}{W_{выхкр}}; \quad (2.84)$$

- на спинке

$$\sigma_{cn} = -\frac{M_1}{W_{cn}}, \quad (2.85)$$

где $W_{вх\ кр}$ – момент сопротивления входной кромки сечения лопатки относительно оси максимального момента инерции,

$W_{вых\ кр}$ – момент сопротивления выходной кромки сечения лопатки относительно оси максимального момента инерции,

W_{cn} – момент сопротивления спинки сечения лопатки относительно оси минимального момента инерции,

$W_{кр}$ – момент сопротивления кромки сечения лопатки относительно оси минимального момента инерции.

Для надежного функционирования рабочего колеса при полном подводе пара суммарные напряжения парового изгиба не должны превышать 40 мПа. В некоторых случаях допускается увеличение суммарных изгибных напряжений до 60 мПа. В случае невыполнения условия $\sigma_{max} < [\sigma]_{доп}$ для лопаток постоянного сечения необходим выбор нового сечения профиля с улучшенными прочностными характеристиками.

2.2.4 Вибрационный анализ

Эффективный путь обеспечения вибрационной надежности лопаточного аппарата – отстройка рабочих лопаток от резонанса, т.е. собственные частоты колебаний лопаток не должны совпадать с частотами возмущающих сил.

В ступени во время работы всегда существуют возмущающие силы любой кратности. Все возмущающие силы кратны частоте вращения. Они называются возмущающими силами первого рода, если коэффициент кратности K_k не совпадает с числом сопловых лопаток, и возмущающими силами второго рода, если коэффициент кратности равен числу лопаток сопловой решетки Z_c .

Частота возмущающих сил первого рода:

$$\nu_1 = K_k n \quad (2.86)$$

второго рода:

$$\nu_2 = Z_c n \quad (2.87)$$

Возмущающие силы первого рода имеют низкие частоты и поэтому представляют особую опасность для длинных рабочих лопаток. По нормам на вибрационную отстройку вновь проектируемых лопаток паровых турбин с постоянной частотой вращения 50 об/с динамические частоты лопаток ν_∂ (Гц) не должны попадать в следующие интервалы:

$$\begin{aligned} 92 < \nu_\partial < 107, 141 < \nu_\partial < 158, 190 < \nu_\partial < 209, \\ 239 < \nu_\partial < 260, 288 < \nu_\partial < 310. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Выполнение условия (2.88) достигается перераспределением хорд и шагов по радиусу лопатки.

Ко второму типу относятся возмущающие силы, вызванные наличием кромок направляющих лопаток. Они имеют более высокие частоты и опасны для коротких лопаток. Отстройка от резонанса, вызванного возмущающими силами второго рода, обеспечивается выполнение неравенств:

$$0,65 < \frac{\nu_\partial}{Z_c n} < 1,4, \quad (2.89)$$

$$4 < \frac{\nu_\partial}{Z_c n} < 8,$$

второе неравенство относится только к обандаженным лопаткам. Возможны два пути отстройки от резонанса с возмущающими силами второго рода. Первый – упрочение рабочего профиля (выбор новых хорды и шага) и второй – изменение числа сопловых лопаток Z_c .

В данной работе динамическая частота лопаток определяется по следующей схеме. Вычисляется собственная частота первого тона, выражение для которой получено решением дифференциального уравнения изгибных колебаний лопатки со свободной вершиной [35]:

$$\nu^* = \frac{0.56}{I_\lambda^2} \sqrt{\frac{EI_e}{\rho_\lambda F_\lambda}}, \quad (2.90)$$

где I_e – минимальный момент инерции профиля сечения.

Жесткость закрепления лопатки учитывается коэффициентом:

$$\nu = \psi \nu^*, \quad (2.91)$$

где $\psi = 1 - \exp(-0,09 I/i)$,
 $i = I_e / F$ – радиус инерции профиля сечения.

И окончательно динамическая частота изгибных колебаний лопатки определяется формулой:

$$\nu_\partial = \sqrt{\nu^2 + Bn^2}, \quad (2.92)$$

где n – число оборотов ротора в секунду;
 B – коэффициент пропорциональности по А.Е. Шнейдману [36], равный:

$$B = 0,785 D / I - 0,592. \quad (2.93)$$

2.2.5 Расчет газодинамических характеристик решеток

Газодинамические характеристики решеток профилей (коэффициент потерь энергии, подъемная сила, угол выхода потока и т. д.) могут быть определены либо путем решения уравнений течения жидкости (газа) в межлопаточных каналах в различных постановках, либо с использованием обобщенных данных, полученных на основании обработки результатов эксперимента. Каждый из этих подходов имеет свои очевидные преимущества и недостатки. Для наших целей предпочтительнее применение эмпирических методик, которые можно рассматривать как банк данных или моделей для множества профилей определенного класса. Для повышения достоверности и обоснованности получаемой информации целесообразно иметь не одну, а несколько наиболее надежных методик и по разбросу результатов расчета судить об истинных значениях вычисляемых характеристик решеток профилей. При выборе обобщенных методик оценки газодинамических характеристик решеток мы исходили из рекомендаций работ, посвященных сравнению многочисленных методик расчета потерь, а также из нашего опыта их применения для анализа проточных частей осевых турбин.

Будем предполагать, что потери кинетической энергии в решетках осевых турбин включают в себя профильные, вторичные, а если рассматривается пара смежных решеток, то еще потери от нестационарности набегающего потока и потери в осевом зазоре между решетками. Программа определения потерь должна быть составлена таким образом, чтобы можно было рассчитывать как изолированные решетки, так и пары решеток с учетом их взаимного влияния. К сожалению, наши попытки применить обобщенные зависимости, предлагаемые в атласах профилей постоянного сечения [28, 29], не дают оснований рекомендовать их для практических расчетов.

Расчет профильных и вторичных потерь будем вести по методикам Крейга и Кокса [8] (с поправками ХПИ) и Г.Ю. Степанова [13]. Обе учитывают большинство факторов, влияющих на потери в решетках, положительно характеризуются во многих сравнительных исследованиях и, по нашему мнению, являются на сегодняшний день одними из самых надежных.

Согласно методике Крейга и Кокса потери в решетке представляются в виде суммы профильных и вторичных потерь, относенных к выходной скорости

$$\Delta h = (X_p + X_s) \frac{w_2^2}{2}, \quad (2.94)$$

где $X = \frac{1 - \psi^2}{\psi^2}$ – фактор потерь.

Фактор профильных потерь

$$X_p = x_{pb} N_{pr} N_{pi} N_{pt} N_{pix} + (\Delta x_p)_t + (\Delta x_p)_m + (\Delta x_p)_x, \quad (2.95)$$

где x_{pb} – базовая профильная потеря;
 N_{pr} – поправка на число Рейнольдса;
 N_{pi}, N_{pix} – поправки на угол атаки;
 $N_{pt}, (\Delta x_p)_t$ – поправки на толщину выходной кромки;
 $(\Delta x_p)_m$ – поправка на число Маха при сверхзвуковом обтекании;
 $(\Delta x_p)_x$ – поправка на длину вытеснителя.

Фактор вторичных потерь

$$X_s = x_{sb} N_{sr} N_{sl/b} N_{sz}, \quad (2.96)$$

где x_{sb} – базовая вторичная потеря;
 N_{sr} – поправка на число Рейнольдса;
 $N_{sl/b}$ – поправка на относительную высоту лопатки;
 N_{sz} – поправка на потери в осевом зазоре.

Все поправки, входящие в формулы (2.68), (2.69), берутся из графических зависимостей [8], а при программной реализации вводятся в табличном виде и пересчитываются линейной интерполяцией по одной или двум независимым переменным.

В процессе использования данной методики для теплового расчета проточных частей осевых турбин в графические зависимости нами вводились коррективы с целью достижения наилучшего совпадения результатов расчета и экспериментов как для отдельно взятых решеток, так и ступеней. Дополнительно введены поправки на длину вытеснителя $(\Delta x_p)_x$ и N_{pix} и в осевом зазоре N_{sz} [37].

Согласно методике Г.Ю. Степанова [13] в принятых обозначениях (со штрихом) фактор профильных потерь определяется по формуле

$$X_p' = x_{pb}' N_{pr} N_{pt} N_{pix} + N_{pi}' + (\Delta x_p)_t + (\Delta x_p)_m + (\Delta x_p)_x, \quad (2.97)$$

где x_{pb}' – базовая профильная потеря;
 N_{pi}' – поправка на угол атаки.

В соответствии с [13]

$$x_{pb}' = \frac{0.72}{\sin \beta_2} \left(\frac{b_s}{t} \right)^{0.8} \left[\left(\frac{w_{cn}}{w_2} \right)^{3.09} + \left(\frac{w_k}{w_2} \right)^{3.09} \right], \quad (2.98)$$

$$N_{pi}' = 0.058 \left[\left(\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \right)^2 - \left(\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \right)^2 \right] + \\ + 0.265 \left[\frac{\sin(\beta_{1r} - \beta_1) \sin \beta_2}{\sin \beta_{1r} \sin \beta_1} \right], \quad (2.99)$$

где
$$\frac{w_{cn}}{w_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2b_s}{b} \sin \beta_2 + \frac{t}{b_s} \frac{\sin(\beta_1 - \beta_2)}{\sin \beta_1} \right],$$
$$\frac{w_k}{w_2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2b_s}{b} \sin \beta_2 - \frac{t}{b_s} \frac{\sin(\beta_1 - \beta_2)}{\sin \beta_1} \right],$$

b_s – длина скелетной линии профиля,

w_{cn} – средняя скорость на спинке,

w_k – средняя скорость на вогнутой части,

β_{lr} – геометрический угол входа профиля,

β_{l2} – угол входа потока,

β_2 – угол выхода потока.

Здесь принято число Рейнольдса $Re = 10^5$.

Фактор вторичных потерь

$$X'_s = 2X'_p \frac{t}{l} \sin \beta_2 N_{sz}. \quad (2.100)$$

Кроме поправки на вторичные потери N_{sz} , вызванные наличием закрытого осевого зазора (данные ХПИ), учитываются потери трения об образующие согласно [38]:

$$N_{sz} = 1 + 5 \frac{\delta_a}{b}, \quad (2.101)$$

$$x_a = \lambda \frac{\delta_a}{l \sin \beta_2}, \quad (2.102)$$

где λ – коэффициент трения.

Оба указанных фактора принимаются во внимание только при расчете потерь в сопловых решетках.

Потери от нестационарности определяем по методикам Ф.А. Стоянова [39] и С.З. Копелева [40].

Эти простые и работоспособные методики выделяют эффект влияния нестационарности на потери кинетической энергии через характеристики решеток, а не ступени в целом. Увеличение потерь в решетке учитывается коэффициентом χ , который следует ввести как множитель в выражение для X_p и X_s .

Методика Стоянова

$$\gamma = 1 + 17,5\Delta\beta_1, \quad (2.103)$$

где $\Delta\beta_1 = x_{c1} \frac{u}{c_1} \sin \alpha_1 \sin^2 \beta_1$ – амплитуда отклонения угла входа относительной скорости в рабочую решетку из-за нестационарности.

$$x_{c1} = 0.66 \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{t_c(1-\varphi^2)}{\delta_a}} \quad - \quad \text{неравномерность поля скоростей в абсолютном движении на входе в решетку [13].}$$

Метод Копелева

$$\gamma = 1 + 0.5 \frac{t_c}{t_p} \frac{u}{c_1} (\beta_1 + \beta_2) x_{w1}, \quad (2.104)$$

$$\text{где } x_{w1} = \frac{1 - \frac{u}{c_1} \cos \alpha_1}{\left(\frac{u}{c_1}\right)^2 - 2 \frac{u}{c_1} \cos \alpha_1 + 1} x_{c1} \quad - \quad \text{неравномерность поля}$$

скоростей в относительном движении на входе в решетку [40];
 t_c, t_p – шаги сопловых и рабочих лопаток.

При составлении обобщенных зависимостей их авторы исходили из разных физических предпосылок, использовали различную структуру расчетных зависимостей, что очевидно из приведенных выше формул. В этих условиях совпадение результатов расчета служит достаточной гарантией того, что они недалеки от истинных значений, которые были бы получены при газодинамическом эксперименте с решетками, обладающими соответствующими геометрическими параметрами.

2.3. Моделирование состояния рабочих тел и материалов

Уравнение состояния может быть записано в различных формах в зависимости от принятых независимых переменных.

Алгоритмы расчета и оптимизации ступеней осевых турбин должны позволять рассчитывать и оптимизировать ступени как с идеальным, так и с реальным рабочим телом. Для этого используется единая методика вычисления параметров состояния рабочего тела, в которой в качестве независимых переменных берутся давление P и энтальпия i :

$$T = T(P, i), \quad \rho = \rho(P, i), \quad S = S(P, i) \quad (2.105)$$

Для совершенного газа уравнение состояния (2.105) с переменными P и i очень просты:

$$T = \frac{1}{C_p} i; \quad \rho = \frac{C_p}{R} \frac{P}{i}; \quad S = S_0 + C_p \ln i - R \ln P. \quad (2.106)$$

Для перегретого и влажного пара использовались формулы аппроксимации, предложенные в [41]. По данным [41] создана процедура-функция для вычисления параметров как перегретого, так и влажного водяного пара. При этом автоматически определяется с помощью приема, описанного в [42], область iS -диаграммы, в которой протекает процесс. Подпрограмма вычисления параметров состояния удобна для проведения различных расчетов. Например, часто возникающая необходимость в определении местной скорости звука реализуется следующим образом. Скорость звука, как известно, определяется соотношением $a = \sqrt{(dP/d\rho)_{s=const}}$, в силу чего, привлекая второе уравнение состояния (2.105) для определения $d\rho = \rho'_i di + \rho'_P dP$ и термодинамическое тождество $di - dP/\rho = 0$ и исключая из них дифференциал удельной энтальпии, находим

$$a(P, i) = \sqrt{\rho / (\rho'_i + \rho \cdot \rho'_P)} \quad (2.107)$$

Запись уравнения процесса истечения с учетом потерь также предполагает единую методику расчета как для идеального, так и реального рабочего тела.

Нетрудно убедиться, что знание величины коэффициента скорости $\psi = W / W_T$ позволяет определить величину потерь при

истечении $i - i_T = \frac{1 - \psi^2}{\psi^2} W^2 / 2$ и получить выражение,

связывающее значения энтальпий i_T и i в конце изэнтропийного и действительного процессов расширения, а также заторможенной величины энтальпии в относительном движении $i_W^* = H + u^2 / 2 = i + W^2 / 2$:

$$(1 - \psi^2) i_W^* - i + \psi^2 i_T = 0 \quad (2.108)$$

Последнее выражение в сочетании с уравнением изэнтропийного процесса от точки I с параметрами P_1, i_1 и значением относительной скорости W_1

$$S(P_1, i_1) = S(P_{W1}^*, i_{W1}^*) = S(P, i_T) \quad (2.109)$$

позволяет прийти, исключив из (2.107), например, i_T , к следующему уравнению процесса с неизвестными P, i :

$$S\left(P, \frac{1}{\psi^2} [i - (1 - \psi^2) i_W^*]\right) - S(P_{W1}^*, i_{W1}^*) = 0 \quad (2.110)$$

С помощью уравнения процесса (2.110) можно решать целый ряд задач, связанных с тепловыми расчетами ступеней, постановка которых зависит от того, какой параметр из неизвестных является заданным. Если считать известной удельную энтальпию i в конце процесса расширения, то получим уравнение (2.110) относительно давления P . Подобная задача возникает, например, при расчете ступени по заданной степени реактивности или определении противодавления по величине теоретического перепада энтальпий на ступень.

Решение уравнения вида (2.110) с одним неизвестным осуществляется с помощью минимизации квадрата невязки одномерным поиском экстремума. Обычно используется метод квадратичной аппроксимации [16], позволяющий получить решение уравнения (2.110) с приемлемой точностью за 5...10 вычислений невязок.

Дальнейшие расчеты показали также целесообразность создания зависимости $P(i, S)$ для водяного пара. Такая формула получена путем многомерного регрессионного анализа табличных

данных. Простой вид аппроксимирующего полинома при довольно высокой точности аппроксимации (погрешность не более 1,5% во всем применяющемся в турбиностроении диапазоне изменения давления и температуры: $P=2,98\text{кПа}....24,2\text{МПа}$, $i=22000...3800\text{кДж/кг}$) делает формулу весьма удобной для проведения практических расчётов:

$$P = \exp \left[\sum_{k,j} (i \cdot 10^{-6})^k (S \cdot 10^{-3})^j a_{kj} \right]$$

Для случая совершенного газа уравнение процесса, называемое иногда обобщенным адиабатическим [13], можно записать в виде

$$\frac{P}{P_1} = \sigma \left(\frac{i}{i_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \sigma \left(\frac{i}{i_1} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (2.111)$$

где $\sigma = \exp \left(\frac{S_1 - S}{R} \right)$ – коэффициент изоэнтروпийности [13].

Приравнявая отношение давлений P / P_1 для изоэнтропийного (когда $\sigma = 1$) и действительного процессов, из (2.111) получаем $\sigma = (i_T / i)^{\frac{k}{k-1}}$. Из последнего выражения, учтя потери на трение с помощью коэффициента скорости $\psi = W / W_T$, легко имеем выражение для коэффициента изоэнтропийности [14]

$$\sigma = \left[\frac{1 - W^2 / (2\psi^2 i_w^*)}{1 - W^2 / (2i_w^*)} \right]^{\frac{k}{k-1}}, \quad (2.112)$$

где $i_w^* = H + u^2 / 2 = i + W^2 / 2$ – энтальпия по параметрам торможения в относительном движении.

Случай течения через неподвижный венец получается как частный вышеприведенных уравнений, при w (или u) равном нулю, путем замены в формулах i_w^* на i^* , W на C .

Учет физических свойств материалов, используемых для создания элементов турбомашин удобно с помощью интерполяции табличных данных, хранимых в специализированных базах данных

или на дисковых файлах. Фрагмент такого файла, используемого в пакете “Атлас”, имеет вид:

```
*****
* При обращении задаем : *
* lsta - номер стали (1-IX13, 2-1X11МФ,...) *
* T - температура (C) *
* ----- *
* Результат работы программы : *
* g - плотность стали *
* mi - модуль упругости стали *
* lu - к-т линейного расширения *
* dstr - δ-е н-е растяжения *
* dsti - δ-е н-е изгиба *
*****
```

```
*-- metall2.ini --*
*===== характеристики материалов =====*
```

5 * количество типов сталей в базе данных *

```
*- 1 -*
* Назначение: турбинные лопатки, бандажки, скрепляющая проволока. *
* Используется до 450-500 C *
```

```
" IX13 " * наименование материала (18 символов) *
4 * количество температур *
```

```
*--- T --- E --- a --- бт --- бдл --- блп ---*
20. 20.6 10. 410. 1000. 1000.
200. 19.6 10.5 370. 1000. 1000.
400. 18. 11.4 360. 330. 121.
500. 17. 11.8 270. 185. 56.
7.75 * плотность *
* коэффициенты запаса: Кт Кдл Клп *
```

```
2. 2. 1.5
```

```
*- 2 -*
* Назначение: турбинные лопатки, бандажки, скрепляющая проволока. *
* Используется до 560 C *
```

```
" 15X11МФ " * наименование материала (18 символов) *
4 * количество температур *
```

```
*--- T --- E --- a --- бт --- бдл --- блп ---*
20. 22.4 10. 590. 1000. 1000.
200. 20.9 10.6 540. 1000. 1000.
400. 18.9 11.3 480. 1000. 1000.
550. 17. 11.8 420. 140. 90.
7.75 * плотность *
* коэффициенты запаса: Кт Кдл Клп *
```

```
2. 2. 1.5
```

2.4. Методика создания макромоделей характеристик элементов проточной части осевой турбины

В общем случае макро моделирование основывается на двух подходах – теоретическом и формальном [5, 43]. Из-за большей степени универсальности будем ориентироваться на формальный подход.

Макро модели представляют собой зависимости типа "черного ящика" с уменьшенные числом внутренних связей. Наиболее удобно такие зависимости создавать в виде степенного полинома. Получение формальных макромоделей (ФММ) в виде степенного полинома основывается на обработке результатов численных экспериментов, проведенных с помощью исходных математических моделей (ИММ).

Поэтому задача формального макро моделирования включает в себя две подзадачи:

1. Определение структуры ФММ;
2. Нахождение численных значений параметров ФММ (коэффициентов полинома).

Как известно, точность полинома и область адекватности существенным образом зависят от его структуры и порядка. Вместе с тем получение полиномов высоких степеней требует проведения анализа многочисленных вариантов исследуемых элементов проточных частей, что ведет к значительным затратам ресурсов ЭВМ и усложняет сам процесс вычисления коэффициентов полинома.

2.4.1. Планирование эксперимента

Для создания ФММ целесообразно воспользоваться математическим аппаратом теории планирования эксперимента, позволяющим существенно сократить число вычислений – опытов на ИММ, т.е. получить достаточный объем информации при минимальной размерности вектора наблюдений Y' . В частности, использование трехуровневых планов экстремального эксперимента, предложенных Боксом и Бенкиным [7], дает возможность создавать аппроксимационные зависимости в виде полного полинома второй степени для 3-7, 9-12 и 16-факторного эксперимента:

$$y(q) = A_0 + \sum_{L=1}^n A_L q_L + \sum_{L=1}^n A_{LL} q_L^2 + \sum_{L=1}^{n-1} \sum_{J=L+1}^n A_{LJ} q_L q_J, \quad (2.113)$$

где A - коэффициенты ФММ;
 q - вектор нормированных значений факторов Q ФММ;
 n - число факторов ФММ.

При конкретной реализации методики формального макро моделирования необходимо выполнение следующих этапов:

1. Выбор ИММ элемента проточной части;
2. Назначение его критерия эффективности;
3. Выбор параметров ИММ, влияние которых на критерий эффективности элемента проточной части необходимо детально изучить и формирование на их базе вектора варьируемых параметров Q ;
4. Назначение области макро моделирования (диапазонов изменения компонент вектора Q);
5. Формирование матрицы планирования эксперимента;
6. Проведение активного численного эксперимента и оценка компонент вектора наблюдений Y' ;
7. Обработка результатов эксперимента и определение коэффициентов ФММ.

Этапы 1-4 не поддаются формализации и при их выполнении необходимо учитывать специфические особенности объектов макро моделирования и имеющийся опыт проектирования элементов проточных частей осевых турбин.

Рассмотрим более подробно алгоритмы этапов формального макро моделирования, приведенных выше.

Матрица планирования эксперимента (МПЭ) формируется в зависимости от размерности вектора варьируемых параметров Q по специально разработанному алгоритму из двух вспомогательных матриц $M1$ и $M2$. Матрица $M1$ состоит из нулей и единиц, Матрица $M2$ – из единиц с различными знаками. Строки МПЭ образуются из строк $M1$, в которых элементы, равные единице, заменяются на элементы строк матрицы $M2$, причем элемента каждой строки матрицы $M1$ меняются $n2$ раз, где $n2$ - число строк матрицы $M2$.

Таким образом, общее число строк МПЭ и соответственно размерность вектора наблюдений Y будут равны

$$n = n_1 n_2 + n_0,$$

где n_1 -число строк матрицы $M1$;

n_0 -число опытов в центре плана.

В качестве примера рассмотрим описанный алгоритм формирования МПЭ применительно к трехфакторному эксперименту, для которого матрицы $M1$ и $M2$ приведены в табл. 2.7, 2.8. В соответствии с изложенным, из первой строки матрицы $M1$ получаем n_2 строки МПЭ. Этот фрагмент матрицы МПЭ приведен в табл. 2.9.

Таблица 2.7

Вспомогательная матрица M1 трехфакторного эксперимента

Фактор № п/п	q_1	q_2	q_3
1	1	1	0
2	1	0	1
3	0	1	1

Таблица 2.8

Вспомогательная матрица M2 трехфакторного эксперимента

Фактор № п/п	q_1	q_2
1	1	1
2	1	-1
3	-1	1
4	-1	-1

Таблица 2.9

Фрагмент МПЭ, полученный из первой строки матрицы M1

Фактор № п/п	q_1	q_2	q_3
1	1	1	0
2	1	-1	0
3	-1	1	0
4	-1	-1	0

Таблица 2.10

Фрагмент МПЭ, полученный из второй строки матрицы М1

Фактор № п/п	q_1	q_2	q_3
5	1	0	1
6	1	0	-1
7	-1	0	1
8	-1	0	-1

Таблица 2.11

Фрагмент МПЭ, полученный из третьей строки матрицы М1

Фактор № п/п	q_1	q_2	q_3
9	0	1	1
10	0	1	-1
11	0	-1	1
12	0	-1	-1
13	0	0	0

Аналогичные действия проведем со второй и третьей строками матрицы М1. Соответствующие им фрагменты приведены в табл. 2.10, 2.11.

Сочетание факторов q_1 , q_2 , q_3 под номером 13 соответствует центральной точке плана. Объединив в порядке возрастания номеров строк все три фрагмента, получим МПЭ трехфакторного эксперимента.

Таким образом, матрица планирование эксперимента представляет собой таблицу, содержащую информацию о количестве опытов (размерности вектора наблюдений Y') и условиях их проведения. В МПЭ строки соответствуют очередным опытам, а столбцы – очередным факторам (компонентам вектора варьируемых параметров Q). Если элемент МПЭ_{LJ} равен 1, это означает, что в L -ом опыте J -и фактор находится на правой границе области формального макро моделирования: если этот элемент равен -1, то на левой границе. Следует ответить, что приведенный алгоритм формирования МПЭ является одной из возможных модификаций комбинирования ВІВ и РВІВ - схем с планами 2 или их дробными репликами (ВІВ - схема - сбалансированная неполная блок-схема;

РВІВ-схема – частично сбалансированная неполная блок-схема, план 2^p - план полного факторного эксперимента для числа факторов p с варьированием факторов на двух уровнях).

Так матрицы $M1$ представляют собой условное отображение ВІВ или РВІВ-схем, а матрицы $M2$ - соответствуют планам 2^p или их дробным репликам. Процесс формирования вектора наблюдений Y заключается в присвоении его компонентам значений критерия эффективности (к.п.д., мощности и т.д.), вычисляемых по ИИМ. Условия проведения каждого численного опыта определяются вектором варьируемых параметров Q , компоненты которого изменяются в соответствии с элементами строк МПЭ по следующей зависимости

$$Q_{ij} = (P_i + L_i + МПЭ_{ij}(P_i - L_i))/2, \quad (2.114)$$

где L_i, P_i - левая и правая границы области формального макромоделирования;

i - номер компоненты вектора Q ;

j - номер опыта (строки МПЭ).

Обработка результатов численного эксперимента базируется на использовании метода наименьших квадратов, т.е. A_L, A_{LL}, A_{LJ} - коэффициенты ФММ находятся из условия минимума суммы квадратов отклонений значений критерия эффективности элементов проточной части, рассчитанных на ИММ Y' и значений этих же параметров, предсказанных с помощью ФММ. Вместе с тем, применение математического аппарата теории планирования эксперимента позволяют существенно упростить решение системы уравнений и величины коэффициентов можно определить по формулам [7].

С целью проверки адекватности полученной ФММ производится расчет дополнительных вариантов объекта макромоделирования. Конкретные значения факторов ФММ и соответствующие им компоненты вектора Q ИММ определяются с помощью генератора случайных чисел. Критерием адекватности ФММ моделируемому объекту служит остаточная дисперсия

$$\sigma^2 = S/N,$$

где σ - среднеквадратичное отклонение.

2.4.2. Диалоговый анализ ФММ - программа CPLAN

Программа CPLAN предназначена для решения научных и практических задач, связанных с определением оптимального сочетания параметров, обеспечивающих высокий уровень качества исследуемого объекта.

Она позволяет осуществлять

- подготовку и создание плана активного эксперимента;
- учет имеющейся априорной информации о характере связей между варьируемыми параметрами и характеристиками изучаемого объекта;
- обработку результатов эксперимента и создание макромоделей с учетом введенных априорных связей;
- расчетные исследования изучаемых характеристик объекта по их макромоделям;
- решение многокритериальных оптимизационных задач с учетом всевозможных ограничений;
- построение линий уровня и их визуальное исследование в диалоговом режиме (рис. 2.15).

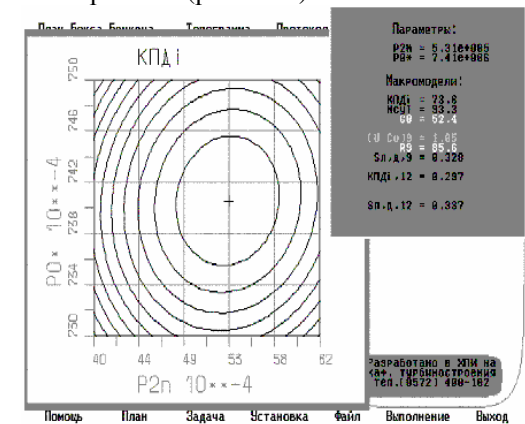


Рис.2.15. Просмотр сечения функциональной зависимости с помощью программы CPLAN.

Программа позволяет планировать эксперимент на основе квадратичных планов Бокса-Бенкина и Рехтшафнера. Первый из

них был описан ранее и имеет такие недостатки как невозможность использования произвольного количества факторов и сравнительно большое число требуемых опытов. Заслуживают внимания насыщенные несимметричные квадратичные планы Рехтшафнера [44], которые представляют собой подмножество ПФЭ 3^k с неплохими статистическими характеристиками. Для расчета коэффициентов регрессии используется L -матрица вида

$$L=DX^T,$$

где D - ковариационная матрица,

X - матрица плана эксперимента.

Оценки вычисляются как сумма по строке элементов L -матрицы, умноженных на соответствующий элемент вектора наблюдений Y

$$B=LY.$$

Планирование эксперимента по Рехтшафнеру в общем случае представляет довольно трудоемкую задачу, требуя специальных предварительных расчетов. В свое время на мощной ЭВМ нам удалось построить планы размерностью до 20. В частности, для получения квадратичного полинома для четырех независимых факторов по Рехтшафнеру достаточно 15 численных экспериментов и это минимальное возможное количество опытов. Для сравнения: план Бокса-Бенкина в этом случае требует проведения 25 опытов.

Программа использовалась, в частности, при решении сложных задач анализа работы и оптимизации многоступенчатых проточных частей осевых турбин, предназначенных для работы на переменных режимах. На первом этапе осуществлялось планирование численного эксперимента с учетом особенностей решаемой задачи. Далее в выбранных точках решалась трудоемкая задача проверочного расчета многоступенчатой турбины на "большой" ЭВМ. Наконец, на третьем этапе результаты расчетов переносились снова в программу CPLAN с целью диалогового анализа достоверности макромоделей, ее диалогового анализа и решения различных оптимизационных задач. В случае необходимости уточнялись диапазоны изменения параметров, характеры связей между ними и описанный процесс повторялся [45].

2.5 Программный комплекс МАСТЕР как инструмент решения задач расчета проточной части турбомашин

Система автоматизированного проектирования "Комплексный тепловой расчет паротурбинной установки (КТР ПТУ)" разрабатывалась в соответствии с техническим заданием на проектирование, утвержденным главным инженером ПО Турбоатом в 1986 г.

Целью создания САПР ПТУ являлось решение следующих задач: уменьшение сроков разработки, улучшение качества проектирования, повышение эффективности ПТУ благодаря применению оптимизации и методов автоматизированного проектирования.

Подсистема должна была обеспечить реализацию автоматизированного проектирования проточных частей паровых турбин с учетом режимов эксплуатации и взаимодействия турбины с другими подсистемами турбоустановки на различных стадиях проектирования.

В основе подсистемы лежат математические модели турбоустановки в целом и проточной части турбины, которые, в зависимости от стадии проектирования обеспечивают анализ и синтез рассматриваемых вариантов создаваемых машин с разной степенью детализации и обеспечивать автоматический переход от менее детализованных описаний к более детализованным и наоборот.

Система автоматизированного проектирования "Комплексный тепловой расчет паротурбинной установки" предназначена для структурно-параметрического проектирования турбоустановок, а также проектирования проточных частей паровых турбин на структурно-параметрическом и функционально-конструкторском уровнях с учетом режимов эксплуатации и взаимодействия турбины с другими элементами турбоустановки.

Автоматизация процесса проектирования ПТУ нуждается в создании методов и процессов автоматизированного проектирования, которые обеспечивали бы поэтапную разработку конструкции ПТУ вплоть до получения необходимой технической документации. Существующая технология проектирования конденсационных паротурбинных установок предполагает расчленение

всего процесса на ряд относительно независимых подзадач, разделение обязанностей между различными группами конструкторов и расчетчиков. В частности, тепловые расчеты включают раздельное проектирование тепловой схемы и проточной части.

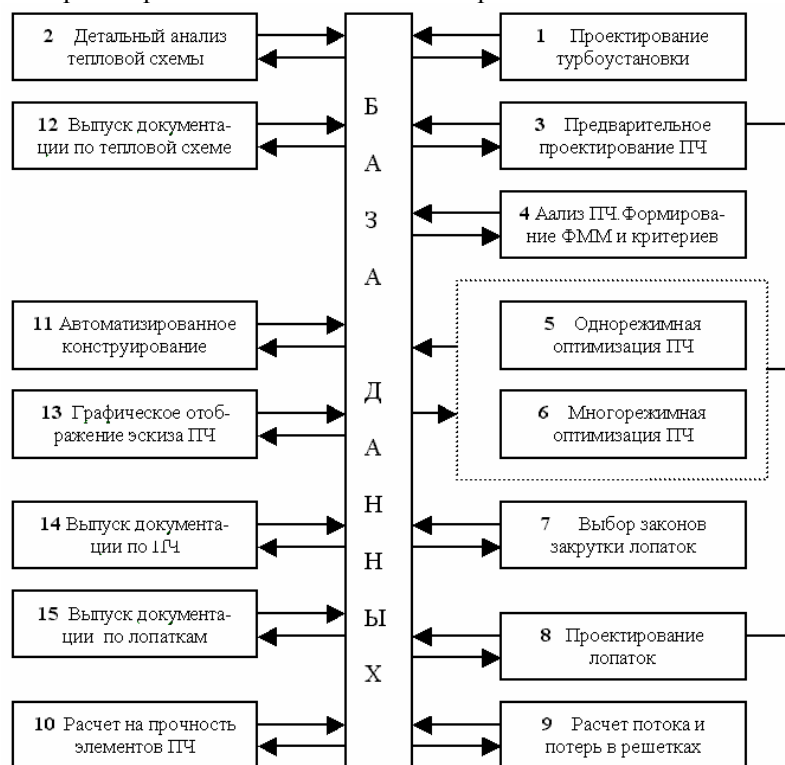


Рис. 2.16. Укрупненная структурно-логическая схема автоматизированного проектирования ПТУ

Характеристики проточной части (экономичность, распределение перепадов по ступеням и др.), получаемые в результате ее проектирования, используются в несколько обобщенном виде при анализе тепловой схемы. Согласование общих показателей ведется во взаимодействии между двумя группами проектировщиков. Описанная технология проектирования, приемлемая при создании

традиционных конденсационных установок, сталкивается с определенными трудностями при разработке ПТУ с большими отборами пара на теплофикацию, особенно в плане учета режимно-временных факторов, влияющих на эффективность и надежность работы проектируемого оборудования.

Новый процесс проектирования должен предполагать такую последовательность расчетов тепловой схемы и проточной части, которая обеспечивала бы анализ и синтез проектируемых подсистем ПТУ на основе моделей разной степени детализации и создавала условия для автоматического обмена информацией о характеристиках объектов на различных уровнях проектирования. Укрупненная структурно-логическая схема автоматизированного проектирования ПТУ представлена на рис. 2.16, где отражены основные этапы, начиная вводом исходных данных и заканчивая формированием расчетной и графической документации.

Исходными для создания ПТУ являются данные, получаемые из технического задания: начальные параметры пара и параметры горячего промперегрева, температура питательной воды, давление на выходе; выдаваемая мощность, частота вращения, теплофикационная нагрузка и температурный график теплосети, расходы и параметры отбираемого пара, диапазон регулирования электрической и паровой нагрузок. На основании этих данных осуществляется проектирование турбоустановки (блок 1), включающее этапы:

- выбор конструктивной схемы турбины (числа цилиндров, количества потоков пара в каждом из них, корневые диаметры роторов, количество ступеней и их предварительные геометрические размеры);

- выбор структуры тепловой схемы (количество и тип регенеративных подогревателей высокого, низкого давления и подогревателей сетевой воды, схему слива дренажей, места отборов пара из турбины на регенеративные и сетевые подогреватели и промежуточный паровой перегреватель);

- оптимизация давления на выходе цилиндров высокого и среднего давления;

- анализ переменных и экстремальных режимов работы турбоустановки (блок 2);

- документирование результатов проектирования (блок 12).

Данные заносятся в базу данных для последующего использования. Далее возможно параллельное проведение детального расчета тепловой схемы (блок 2) и проектирования проточной части (блоки 3-9). По данным расчета турбоустановки детализируется количество ступеней в отсеках, размеры проточной части с учетом прочностных и технологических ограничений, теплоперепады и степени реактивности ступеней (блок 3), что дает возможность синтезировать прототип (если таковой отсутствует), пригодный для дальнейшей проработки. После этого производится анализ прототипа с целью выявления влияния параметров проточной части на его характеристики. Результаты анализа обобщаются в виде формальных макромоделей (ФММ), которые заносятся в банк макромоделей и могут быть использованы для оптимизации ПЧ или для уточнения решений по турбоустановке в целом (блок 4). Выбор критериев оптимальности ПЧ зависит от типа проектируемой турбоустановки: в конденсационных ПТУ оптимизируется ПЧ на единственном, номинальном режиме; при наличии нерегулируемых отборов пара, переменной частоте вращения или давления пара на входе и выходе проточной части критерием оптимальности является усредненная по режимам мощность турбины. Таким образом, следует использовать процедуры оптимизации на номинальном режиме (блок 6) или многорежимной оптимизации (блок 5) проточной части. До этого момента используются одномерные модели расчета потока в турбине в предположении закрутки лопаток по закону свободного вихря. С целью дальнейшей детализации при необходимости выбираются законы закрутки лопаток (блок 7) по ступеням турбины. По окончании тепловых расчетов ПЧ приступают к этапу проектирования лопаток (блок 8), который предполагает профилирование цилиндрических сечений и их взаимную увязку по высоте. При этом рассчитывается обтекание решеток и оцениваются потери кинетической энергии в них (блок 9). На всех этапах, начиная с предварительного проектирования, имеется достаточная информация для автоматизированной разработки конструкции ПЧ в соответствующем приближении (блок 11) и оценки статической прочности элементов синтезированной конструкции (блок 10).

Описанная схема обеспечивает иерархичность и итерационность процесса проектирования, позволяет, начиная с любого

этапа возвратиться на более ранние стадии с целью уточнения или изменения принимаемых проектных решений.

В соответствии с ГОСТ 23501.0-79 в состав САПР входят проектирующие и обслуживающие подсистемы. Проектирующие подсистемы делятся на объектно-ориентированные (выполняющие проектные процедуры или операции, непосредственно зависящие от объекта проектирования) и объектно-независимые (инвариантные), выполняющие унифицированные проектные процедуры.

Предполагалось в структуру САПР КТР ПТУ включить следующие проектирующие объектно-ориентированные подсистемы:

- проектирование турбоустановки (ПТ);
- проектирование проточной части (ППЧ);
- проектирование лопаточного аппарата (ПЛ);
- автоматизированного конструирования (ПАК);
- инвариантные:

- формального макро моделирования (ПФМ);
- оптимизации (ПО);

К обслуживающим подсистемам относятся:

- мониторная система (МС);
- подсистема информационного обеспечения (ПИО);
- подсистема графического отображения (ПГО).

Опишем задачи, решаемые каждой из подсистем и порядок их взаимодействия.

На основании данных ТЗ производится оптимальное проектирование конструктивной и тепловой схемы турбоустановки. Данные по ПЧ, получаемые в результате расчета тепловой схемы турбоустановки, заносятся в базу данных и могут быть использованы в подсистеме проектирования ПЧ. В ППЧ решаются следующие задачи:

- предварительного проектирования проточной части;
- анализа математических моделей ПЧ и формальных макро-моделей выходных параметров;

- оптимального проектирования многоступенчатой ПЧ в одномерной постановке по критериям максимума мощности на номинальном режиме или по гамме режимов;

- выбора законов закрутки лопаток путем многовариантных расчетов ступеней по квазидвумерной теории.

В результате решения указанных задач формируется база данных по создаваемой проточной части, включая данные, необходимые для последующего графического отображения результатов проектирования.

Подсистема проектирования лопаточного аппарата позволяет осуществить профилирование сечений направляющих и рабочих лопаток, произвести их увязку по длине лопаток в диалоговом режиме, рассчитать параметры потока в решетках и оценить потери путем расчета пограничного слоя. Оптимальность проектных решений обеспечивается совершенным методом профилирования по геометрическому критерию качества, многовариантностью проработки с анализом характера обтекания решеток, выбором распределения хорд по высоте лопатки из условия минимума потерь. Надежность создаваемых лопаток обеспечивается выполнением условий статической прочности.

Подсистема АК формирует цифровую модель конструкции проточной части, основанную на результатах проектирования ПЧ, использования стандартных конструкторских решений, с учетом опыта конструирования, накопленного в ПО "ХТЗ".

Подсистема формального макро моделирования предназначена для формирования квадратичных моделей параметров объектов проектирования путем вычислительного эксперимента на исходных математических моделях (ИММ) их функционирования. В результате работы ПФМ получают коэффициенты ФММ, заносимые в БД или программы на языке высокого уровня, реализующие ФММ. Подсистема располагает языком формирования ФММ, позволяющим в диалоговом режиме выбирать объект моделирования и необходимый набор факторов.

Подсистема оптимизации служит для поддержки процедур оптимального проектирования элементов турбоустановки. Она включает в себя методы и программы поиска экстремума функций одной и нескольких переменных при наличии ограничений или без них.

Проектирование в САПР КТР ПТУ поддерживается мониторинговой системой, обеспечивающей диалог с пользователем с представлением данных в символьном виде. МС должна осуществлять управление процессом проектирования, выдачу справочной и диагностической информации, распределение ресурсов системы и т. д.

Подсистема информационного обеспечения служит для хранения и представления нормативно-справочной информации, необходимой для выполнения проектных процедур, ФММ объектов, типовых конструктивных элементов и т.д.

Подсистема ПГО служит для наглядного представления результатов проектирования на основании данных, поступающих из проектирующих подсистем. Результаты представляются в графической или псевдографической форме в виде диаграмм, графиков, линий уровня, чертежей и пр.

Информационное обеспечение включает в себя описание большого объема данных, циркулирующих в системе, в том числе: проектных процедур, типовых конструктивных элементов, научно-техническую информацию предметной области (нормативно-справочная информация, нормали, ГОСТы, унифицированные изделия и ТА.), параметры проектируемых объектов и пр. Важнейшим и не формализуемым этапом создания информационного обеспечения является анализ предметной области проектирования, в результате которого получается информационно-логическая модель, включающая структурные характеристики данных информационных процессов, использующих эти данные. Применительно к проектированию турбоустановки в рамках задач, решаемых в САПР КТР ПТУ, структура данных имеет вид, приведенный в [46]. Представленной информации достаточно для составления концептуальной схемы при использовании одной из промышленно поставляемых СУБД.

Подсистема автоматизированного проектирования проточной части служит для выбора основных параметров многоступенчатых цилиндров на основании минимальной информации, поступающей из подсистемы ПТ, подробного анализа рабочего процесса ПЧ, оптимизации ее параметров в одномерной и двумерной постановках. Структурная схема подсистемы представлена на рис. 2.17. Сложность решаемой задачи - проектирования ПЧ - приводит к необходимости расчленения ее на ряд подзадач различной сложности с использованием математических моделей, описывающих функционирование объекта проектирования с разной степенью детализации.

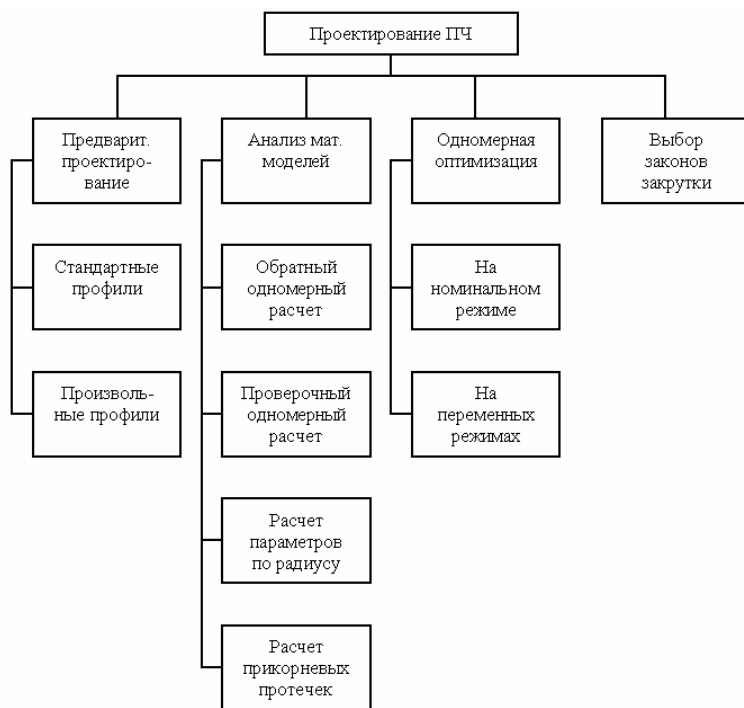


Рис. 2.17. Структурная схема подсистемы автоматизированного проектирования проточной части

Наряду с математическими методами оптимизации широко используются эвристические методы, реализуемые проектировщиком в режиме диалога с ЭВМ. Глубина проработки, равно как и степень сложности используемых математических моделей и методов оптимизации зависит от предъявляемых требований к совершенству создаваемой конструкции и может выбираться проектировщиком. Таким образом, рассматриваемая подсистема обеспечивает выполнение целого набора проектных процедур, состав которых представлен на рис. 2.17.

Проектные процедуры предварительного проектирования проточной части, используемые в подсистеме комплексного теплового расчета, должны обладать широкими возможностями и по форме и по содержанию. Предполагается, что они будут работать как авто-

номно, независимо от проектирования тепловой схемы, так и совместно с ним. В обоих случаях необходимо реализовать такие режимы работы, чтобы осуществлять диалоговое и оптимальное проектирование проточной части. Учитывая это, задача ставится следующим образом: на заданную частоту вращения ротора по параметрам, полученным в результате проектирования тепловой схемы, перед цилиндром i , P , противодавлениям за отсеками P_j и расходам в них G_j , варьируя корневым диаметром, реактивностью, отношением D/I первой ступени и раскрытием проточной части, необходимо спроектировать унифицированную проточную часть максимальной мощности, конструкция которой удовлетворяет условиям статической прочности. При проектировании ПЧ выдвигается важное требование - унификация лопаточного аппарата. Так, в цилиндрах высокого и среднего давления мощных паровых турбин большинство ступеней выполняется с лопатками постоянного сечения или закрученными по закону постоянной циркуляции. Сопловые лопатки с обратной закруткой в ближайшее время пока не найдут широкого распространения в стационарном турбостроении, поэтому при определении числа ступеней воспользуемся соотношениями выведенных для закона постоянной циркуляции.

Исходя из требований унификации, перепады в ступенях выбираются равными и корневая реактивность во всем цилиндре одинаковая.

Проектная процедура “Анализ математических моделей ПЧ” предназначена для проведения тепловых расчетов проточной части. Реализуемые математические модели используются при предварительном проектировании и оптимизации параметров многоступенчатых турбин. Специфика автоматизированного проектирования предъявляет жесткие требования к быстродействию алгоритмов теплового расчета, в связи с чем в САПР КТР ПТУ следует пользоваться моделями, построенными на одномерном и квазидвумерном подходах. Для обеспечения точности, достаточной для оценки экономичности проточной части, математические модели должны удовлетворять ряду требований:

расчет должен вестись с использованием зависимостей, описывающих параметры состояния реального рабочего тела;

следует проводить расчеты с учетом потерь кинетической энергии в решетках профилей и дополнительных потерь, связанных с протечками, вентиляцией, влажностью и т. д.

коэффициенты расхода щелей должны определяться в функции условий истечения и в зависимости от конструктивных факторов.

Наиболее удобен и точен учет перечисленных факторов с помощью известных обобщенных зависимостей и эмпирических данных. Методы расчета должны допускать анализ ПЧ многоступенчатых турбин.

Реализация задач теплового расчета осуществляется с помощью подпрограмм с кодами:

- R - обратный одномерный расчет проточной части;
- P - проверочный одномерный расчет многоступенчатой ПЧ;
- B - поступенчатый квазидвумерный расчет проточной части;
- L - расчет протечек у корня многоступенчатой ПЧ.

Входная и выходная информация программ соответствует набору данных, циркулирующих в системе. Пользование программами облегчается возможностями представления вводимых данных с помощью специальных бланков, а также автоматического формирования выходных данных в форматах, принятых в системе. Каждая из задач допускает изменение информации в процессе решения в режиме диалога с ЭВМ. Это обстоятельство дает возможность оперативно проводить расчетные исследования по влиянию геометрических и режимных параметров на характеристики исследуемой ПЧ, а при наличии достаточного опыта и интуиции и оптимизацию по ряду параметров.

Задача проектной процедуры "Оптимальное проектирование ПЧ" в одномерной постановке заключается в определении конструктивных и термогазодинамических параметров ПЧ ЦВД, обеспечивающих при заданных параметрах рабочего тела на входе и выходе из ПЧ максимум вырабатываемой мощности цилиндра. Решение данной задачи основывается на математическом моделировании физических процессов, происходящих в ПЧ, для описания которых используются методики одномерного расчета ПЧ в обратной и прямой постановках (см. проектную процедуру "Анализ математических моделей ПЧ").

Метод поиска оптимального сочетания параметров ПЧ базируется на математическом аппарате теории систем и теории планирования эксперимента. Общая задача оптимального проектирования ПЧ представляется в виде иерархически взаимосвязанных подзадач-блоков. Иерархия проектирования, требования к параметрам математических моделей каждого уровня и алгоритм обмена информацией между смежными уровнями проектирования являются составной частью математического обеспечения САПР КТР ПЧ.

Метод оптимизации параметров ПЧ основан на использовании математического аппарата теории планирования эксперимента и методик поисковой оптимизации. Он предназначен для решения задач оптимального проектирования ПЧ ЦВД с учетом переменной режимов их работы.

В результате проектной процедуры “Выбор законов закрутки лопаток” должны быть выбраны изменения по радиусу углов выхода потока, геометрия углов входа, хорд, а также количество сопловых и рабочих решеток, обеспечивающие максимум внутреннего к.п.д. ступеней, составляющих проточную часть. Можно также подбирать оптимальные углы навала сопловых и рабочих решеток. Используется математическая модель квазидвумерного аэродинамического расчета, описанная выше.

Задача проектирования сечений турбинных лопаток PROFF строит профили сечений турбинных лопаток. Требуется спроектировать плоскую решетку профилей совершенной аэродинамической формы с заданными геометрическими характеристиками, обеспечивающую требуемые параметры потока на выходе.

Основными исходными данными для профилирования являются:

- хорда профиля b ;
- шаг решетки t ;
- геометрический угол входа $\beta_{1\alpha}$;
- эффективный угол выхода $\beta_{2\text{эфф}}$;
- площадь профиля f ;
- радиусы входной и выходной кромок r_1 , и r_2 ;
- угол заострения выходной кромки ω_2 ;
- ширина профиля с вытеснителем (для сопловых решеток).

Кроме того, по желанию конструктора могут быть заданы следующие не основные параметры:

угол установки β_1 ;

угол отгиба;

геометрический угол выхода β_2 ;

угол заострений входной кромки ω_1 (площадь в этом случае не задается).

Задаются также параметры потока, необходимые для расчета эпюры обтекания и коэффициента профильных потерь:

массив углов натекания потока β_1 ;

скорость потока на входе в решетку w_1 ;

Проектная процедура “Формирование пера лопатки” предназначена для формирования пера лопатки из профилей сечений, спроектированных по программе PROFF, с учетом требований аэродинамики, прочности и технологичности.

Один из способов формирования пера - наложить профили сечений, совместив центры тяжести и получить таким образом вторую проекцию пера лопатки. По известному расположению сечений по высоте строятся первая и третья проекции.

К лопаткам большой длины предъявляются требования плавности поверхности, т.е. отсутствие выступов и впадин. Еще более жесткие требования предъявляются к лопаткам, которые изготавливаются косым фрезерованием. Поверхность их должна быть линейчатой.

Чтобы построить перо, удовлетворяющее этим требованиям, поступим следующим образом. После того, как в каждом сечении спроектирован аэродинамически совершенный профиль и, как описано выше, построена вторая проекция лопатки, отдельно для выпуклой и вогнутой поверхностей найдем оптимальные углы наклона и образующих поверхностей к оси лопатки.

Для этого сдвинем профили всех сечений по высоте в осевом и окружном направлениях на z_i , x_i (i – номер сечения), которые будем вычислять по следующим формулам:

$$z_i = l_i \operatorname{tg} \theta$$

$$x_i = l_i \operatorname{tg} \sigma$$

Контуры корытц и спинок всех профилей, заданных по точкам аппроксимируем полиномами по методу наименьших квадратов, Оптимальные значения углов θ и σ такие, которые доставят минимум целевой функции - среднеквадратичному отклонению, Эта задача решалась с помощью метода Нелдера-Мида.

Участками полученных в результате полиномов заменяем вогнутые и выпуклые стороны профилей, затем в полученные контуры вписываем кромки, используя алгоритм, предложенный в [30]. Если лопатка будет изготавливаться косым фрезерованием, по полученному профилю лопатки определяем профиль фрезы [47].

Расчетная схема метода построения пера лопатки следующая. Сначала по заданным исходным данным на каждом радиусе с использованием программы PROFF проектируются профили сечений совершенной аэродинамической формы. Затем строится вторая проекция лопатки, на которой совмещаются центры тяжести профилей в пределах заданных допусков. Если ставится задача спроектировать перо с гладкой поверхностью, в том числе и под косое фрезерование, то определяются оптимальные значения углов θ и σ , степенными полиномами строятся профили вогнутой и выпуклой сторон лопатки, в каждом сечении в профиль вписываются кромки, определяются геометрические характеристики и эпюры обтекания. Если они не удовлетворяют конструктора, можно перепрофилировать неудачные сечения и повторить построение пера.

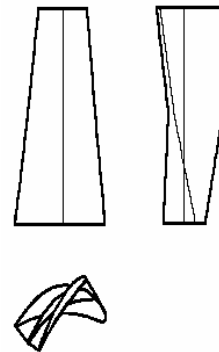


Рис. 2.18. Пример пера лопатки

Исходными данными для расчета являются:

- массив углов натекания потока β_1 ;
- угол выхода потока β_2 ;
- массивы координат точек контура X, Y ;
- шаг решетки t ;
- скорость потока на входе в решетку w_1 ;
- температура рабочего тела на входе в решетку T ;
- показатель адиабаты k ;
- число Рейнольдса Re .

Задача расчета обтекания и коэффициента профильных потерь STREAM рассчитывает распределение скорости по обводу профиля в решетке и величину коэффициента профильных потерь.

Требуется найти значения скоростей на контуре профиля и определить величину профильных потерь.

Разработано большое количество методов расчета обтекания, основанных на непосредственном решении дифференциальных уравнений течения, на применении конформных отображений, на использовании особенностей (источников, стоков, вихрей). Однако наиболее подходящими для применения в САПР надо признать группу методов, основанных на использовании интегральных соотношений для решетчатых областей.

Подсистема автоматизированного конструирования проточной части.

Турбина с точки зрения проектирования и производства является мелкосерийной или индивидуальной продукцией, с точки зрения конструирования – трехмерный объект со “скульптурными” поверхностями, т.е. особо сложной формы. Анализ реального процесса конструирования показывает, что сначала выполняется проработка и компоновка продольного разреза главного вида турбины, т.е. рассматривается уже не трехмерный, а двумерный объект. При необходимости он дополняется недостающими и тоже плоскими проекциями. Происходит переход от решения объемной к решению плоской задачи, которая в большинстве случаев удовлетворяет требованиям разработчика.

Автоматизировать процесс конструирования главного вида турбины даже в плоской постановке довольно трудно. Необходимо иметь широкий ассортимент моделей ГМ деталей, занести его в ЭВМ, создать программы их расчета и компоновки всей турбины. Поэтому ПЧ рассматривается только в пределах входной кромки сопловой решетки первой и выходной кромки рабочей решетки последней ступеней части высокого давления. Под автоматизированным конструированием (АК) понимается подбор характеристик и запись конструкции с помощью ЭВМ. В основу предлагаемого метода АК положено использование традиционных конструктивных решений, широко применяемых и проверенных на практике. Постоянство традиций обусловлено технологией изго-

товления заводов. Часть их оформлена в виде ОСТов и Стандартов предприятий и переходит из проекта в проект совершенно без изменений. Другая часть остается принципиально постоянной, лишь изменяются некоторые конструктивные элементы. И только совсем незначительная доля деталей создается принципиально новой. Схема такого конструирования выглядит следующим образом: конструктор выбирает исходные геометрические модели (ГМ) деталей и создает расчетную модель (РМ) каждой. Исходные объединяются в банк ГМ, который представлен как каталог традиционных решений (таблет) или может быть оформлен в виде меню на экране графического терминала, расчетные - в банк РМ. Затем разрабатывается расчетная модель части или всей сборочной единицы, которая формирует информационную модель (ИМ) проектируемого объекта. Если учесть, что в ЭВМ наиболее удобно числовое представление данных, то целесообразно и информационные модели организовывать в числовой форме.

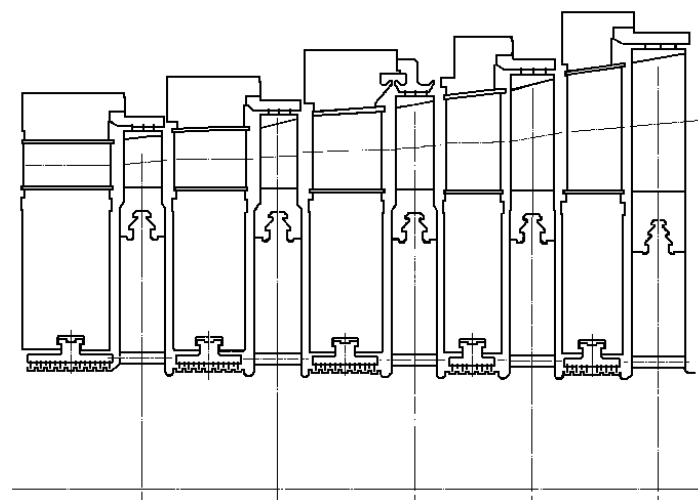


Рис. 2.19. Пример автоматизированного конструирования и отображения
проточной части многоступенчатой турбины

Запись конструкции в виде упорядоченной последовательности чисел, сформированной по определенным правилам, позволяет после проверки без особых трудностей преобразовать ее в

чертеж, управляющую ленту для станка с ЧПУ, текст или любую другую форму. В данном случае с помощью специализированного пассивного пакета графических программ получаем эскиз проточной части высокого давления паровых турбин.

Такой подход при наличии правильных расчетных моделей ВД сейчас позволяет говорить не об автоматизированном, а об автоматическом конструировании, которое сводится к расчетной задаче, что намного быстрее традиционных методов АК, обработки геометрических образов и их преобразований, описанных в [48, 49].

Подсистема графического отображения.

Для представления информационных моделей в графическом виде разрабатывается специализированный пакет графических программ, позволяющий автоматизировать получение наглядного представления о конструкции ПЧ, происходящих в ней процессах, необходимых графиков на начальных этапах проектирования. Пакет представляет собой набор процедур-подпрограмм на языке PL-1, базисным уровнем которых являются программы пакета "GPR-100" на Фортране, разработанного французской фирмой "Benson", совместимые с базисом "Стандартного пакета промышленного черчения" (ISDP) и графическим расширением языка Фортран для ОС ЕС. Все подпрограммы разделены на три группы:

- общего назначения;
- построения графиков и процессов;
- отображения конструкций.

Программы общего назначения расширяют возможности базисных примитивов. Они позволяют построить и оформить некоторые наиболее используемые графические элементы в соответствии с ЕСКД.

Вторая группа программ служит для построения процессов расширения рабочего тела в проточной части, треугольников скоростей, графиков, схем прикорневых протечек, линий тока в проточной части и т.д.

В третью входят программы, позволяющие отображать плоские геометрические модели элементов конструкции ПЧ (бандажа, пера и хвостовика лопаток, вала, обода и бандажных лент диафрагмы, уплотнительного сегмента кольцевого уплотнения между валом и диафрагмой, козырька над рабочей лопаткой), результаты

проектирования плоских сечений лопаток с эпюрами их обтекания, эскизы пера лопатки в трех проекциях и пр. Этот пакет используется управляющими программами, преобразующими числовую запись конструкции в графический файл на магнитном диске, который и выводится на графопостроитель. Данные для управляющих графических программ формируются автоматически в задачах проектирования и конструирования с помощью программных интерфейсов.

Подсистема формального макро моделирования предназначена для создания аппроксимационных зависимостей - формальных макромоделей (ФММ) различных характеристик проточной части и ее элементов по результатам численных и натурных исследований. ФММ могут использоваться при решении оптимизационных задач и оценке параметров точек начального приближения с целью существенного сокращения потребления ресурсов ЭВМ.

Подсистема оптимизации служит для поддержки оптимального проектирования турбоустановки и ее элементов. Она включает в себя компоненты математического, методического и программного обеспечения. Как известно, не существует универсального метода решения этой задачи, поэтому в состав подсистемы включаются методы расчета, наиболее подходящие для конкретных рассматриваемых задач проектирования.

Методы одномерной оптимизации имеют как самостоятельное значение для отыскания экстремума функций одной переменной и решения нелинейных уравнений, так и в качестве вспомогательных алгоритмов при определении экстремума функций многих переменных. Для гладких функций следует пользоваться методом квадратичной аппроксимации ДСК-Пауэлла [16], который обладает высокой точностью и не требует задания диапазона изменения аргумента. Для поиска экстремума унимодальной функции на интервале служит метод золотого сечения [16].

Для безусловной оптимизации функции многих переменных разработано огромное количество алгоритмов [16, 50]. На основании имеющегося опыта и рекомендаций литературы по этому вопросу выбраны два метода: сопряженных градиентов Флетчера-Ривса и деформируемого многогранника Нелдера-Мида.

Мониторная система САПР предназначена для интеграции проектирующих и обслуживающих подсистем и управления процессом проектирования. В ее состав входит монитор системы и мониторы (управляющие программы) задач. Взаимодействие мониторов с пользователем осуществляется посредством диалоговых языков управления.

Функции мониторов включают в себя:

- обеспечение диалогового режима и интерпретацию команд;
- загрузку компонентов ПО и организацию маршрутов их выполнения;
- установление взаимодействия между подсистемами;
- организация обучения, подсказок, адаптацию диалога к уровню пользователя;
- обеспечение многопользовательского режима работы САПР;
- управление вводом-выводом информации;
- обработка прерываний от дисплея пользователя;
- сервисные функции (протоколирование, диагностика и пр.);
- обеспечение возможностей подключения новых подсистем и совместимости с монитором и уже существующими подсистемами.

Монитор системы строится на основе возможностей, предоставляемых операционной системой с использованием языка управления заданиями. Управляющие программы задач создаются на языке высокого уровня, принятом в системе.

Подсистема информационного обеспечения САПР КТР ПТУ является обслуживающей подсистемой, предназначенной для организации, использования, хранения данных, необходимых для проектирования турбоустановки и ее элементов.

В состав информационной базы САПР включаются компоненты, хранящиеся в памяти ЭВМ (база данных) и вне ее - информационный фонд). Информационный фонд охватывает источники информации, предназначенные для пользователей САПР: текстовые и графические документы, справочники, отчеты, карточки и т. д.

ГЛАВА 3. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ТУРБОМАШИНЫ

При разработке методов оптимизации лопаточных аппаратов турбомашин большую роль играет выбор аэродинамической модели. Если модель не учитывает или же неправильно учитывает какие-либо факторы, влияющие на эффективность турбомашин, то вполне очевидно, что полученная конструкция будет иметь резервы для её улучшения. Поэтому особо важно в задачах оптимизации проточных частей использовать модели течения, учитывающие наиболее полно и точно основные факторы, влияющие на эффективность. В последнее время широкого распространения получило мнение [51], что для достижения физической адекватности на сегодняшний день минимально допустимым уровнем моделирования течений и определения КПД ступени турбины является моделирование вязкого трёхмерного течения. Однако в настоящее время из-за всё ещё существующих ограничений в быстродействии ЭВМ не представляется возможным в алгоритмы оптимизации проточных частей напрямую включить расчёты трёхмерного вязкого течения.

Поэтому в настоящее время наиболее перспективным представляется подход, в котором оптимизация проточной части турбины выполняется с помощью моделей осесимметричного течения, а модели трёхмерного вязкого турбулентного потока привлекаются только на заключительном этапе для, так называемой, «доводки» лопаточных аппаратов[52].

Как известно, одним из существенных резервов повышения КПД ступени является снижение концевых потерь, которые определяются в основном окружной неравномерностью в концевых и периферийных сечениях. Одним из путей снижения концевых потерь является использование пространственного профилирования лопаток, в частности саблевидности или выполненной по сложному закону закрутки. Эффективные лопатки такой сложной формы как раз и можно получить с использованием математической модели пространственного вязкого турбулентного течения.

В настоящей главе подробно излагается математическая модель пространственного вязкого турбулентного течения в лопаточных аппаратах турбомшины. Эта модель, реализованная в программном комплексе *FlowER* [53] и построенных на его основе пакетах, широко используется на ряде предприятий турбомашиностроения как в Украине, так и за ее пределами.

3.1. Основные подходы к решению задачи о вязком трехмерном течении в проточной части турбомшины

До последнего времени при проектировании проточных частей турбомашин на разных его этапах использовались простые модели течения газа: одномерные, квазидвухмерные, двухмерные (плоские и осесимметричные) [54, 25, 55, 56 и др.]. После появления первых решений трехмерных уравнений газовой динамики началось использование моделей пространственного течения в изолированных венцах [57, 58, 59] только на этапе проверочных расчетов.

В настоящее время в результате стремительного роста возможностей вычислительной техники и почти столь же быстрого развития вычислительной аэродинамики ситуация меняется радикальным образом. Уже сейчас для большинства современных отечественных и зарубежных конструкторских бюро процесс проектирования стал невозможным без использования моделей трехмерных течения в лопаточных аппаратах. Это объясняется не только экономическими причинами: огромной стоимостью физического эксперимента, но и его ограниченными возможностями по сравнению с экспериментом численным, чрезвычайно большой трудоемкостью, длительными сроками подготовки, проведения и обработки результатов и т.д.

Появление модели трехмерного течения в многоступенчатой турбомашине ознаменовало собой новый этап в проектировании лопаточных машин. Точность и универсальность данной модели, возможность ее использования, как для отдельных ступеней, так и для всей турбомшины в целом, поставили проектировщиков перед фактом ненужности во многих случаях более простых и менее точных моделей, в частности модели осесимметричного течения в турбомашине [60, 61].

Вполне очевидно, что адекватное описание потока в современных высоконагруженных решетках возможно только с использованием системы нестационарных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа [62, 63]. Ограниченные возможности нынешних компьютеров не позволяют осуществлять прямое численное решение этих уравнений и, поэтому, возникает необходимость в осреднении исходных уравнений по Рейнольдсу–Фавру. Без привлечения достаточно точных, работающих для широкого класса течений, моделей турбулентности наивно претендовать на правильный учет вязких и турбулентных эффектов, которые оказывают существенное влияние на эффективность проточной части.

Нестационарные уравнения Навье–Стокса представляет собой чрезвычайно сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Постановка задачи отыскания решения рассматриваемой системы уравнений для течения в лопаточных аппаратах, строго говоря, не является математически корректной, так как не доказаны теоремы существования и единственности такого решения. Аналитические методы решения данной нелинейной системы не только отсутствуют в настоящее время, но и нет уверенности даже в возможности их получения [64, 65]. Математические трудности изучения и решения такого типа проблем связаны с нелинейностью уравнений, большим числом независимых переменных, сложностью формы обтекаемых потоком тел.

Выбор численного метода для решения рассматриваемых задач, несомненно, играет большую роль. В некоторых случаях предпочтительней отказаться от решения системы уравнений Навье–Стокса в пользу более простых моделей, чем решать их плохим методом.

Существует огромное множество разностных схем для решения нестационарных уравнений Навье–Стокса в полной или упрощенной формах. Достаточно содержательное описание и сопоставление многих из них приведено в работах [66,67,68,69,65,70,71,72,73 и др.]. Сформулируем основные требования, на основании которых могут быть проанализированы различные методы и обоснован выбор конкретного из них: *точность, монотонность, способ аппроксимации конвективных производных,*

согласованность с условием неубывания энтропии, надежность, вычислительная эффективность.

Практика решения сложных многомерных нестационарных нелинейных задач газовой динамики показывает, что предпочтение следует отдавать методам, по меньшей мере, *второго порядка точности*. Такой выбор во многом объясняется тем, что методы первого порядка, используемые для решения нелинейных уравнений на нерегулярных сетках, могут вносить погрешность, неустраняемую измельчением пространственного шага интегрирования (т.е. погрешность нулевого порядка) [74]. Кроме того, на методы первого порядка, по сравнению с методами более точными, накладываются гораздо более жесткие условия измельчения сетки для адекватного учета вязких членов уравнений Навье–Стокса. В настоящее время схемы первого порядка уже практически не используются в более или менее серьезных работах [75].

Способ аппроксимации конвективных производных существенно влияет на качество метода. Известно, что аппроксимация разностями по потоку приводит к абсолютно неустойчивым разностным схемам, аппроксимация центральными разностями обычно порождает нелинейную неустойчивость в областях с большими градиентами. Устойчивыми в линейном и нелинейном отношении могут быть только методы с *разностями против потока* [69]. Очевидное объяснение этого факта состоит в том, что только методы с разностями против потока являются согласованными с областями влияния исходных уравнений.

Адекватность численных решений реальным физическим процессам не может быть достигнута, если численный метод не обеспечивает согласованности решений с условием неубывания энтропии [76,77]. Очень часто при построении разностных схем это требование игнорируется и, как результат, получаемые численные методы позволяют существование в решении нефизических явлений, таких как скачки разрежения в адиабатическом трансзвуковом потоке. Необходимо подчеркнуть, что даже для полностью дозвуковых течений при использовании методов несогласованных с энтропийным условием в решении нередко наблюдаются зоны с пониженной энтропией, что может фатально сказываться на оценке потерь.

К важнейшим свойствам численных методов относится *монотонность*. Как известно, повышенная схемная дисперсия, присущая методам высокого порядка, может приводить к появлению нефизических осцилляций. При этом сходимость решения при измельчении сетки, в большинстве случаев отсутствует [78]. Даже если амплитуда осцилляций невысока и снижается по мере уменьшения пространственного шага сетки, по полученным немонотонным решениям невозможно с достаточной точностью определить величины производных газодинамических параметров, положение разрывов и некоторые другие важные характеристики течения, не говоря уже об элементарных неудобствах, которые возникают при анализе и обработке таких решений. Поэтому считается, что методы расчета до-, транс- и сверхзвуковых течений должны быть монотонными.

Надежность численного метода может играть решающую роль, если речь идет о широком использовании программного обеспечения, реализующего данный метод и в частности его применении для решения задач оптимизации. Понятие надежности применительно к методам расчета внутренних аэродинамических течений заключается в удовлетворении следующих требований:

- возможность "безаварийного" проведения расчетов течения в реальных проточных частях произвольной формы при любых теоретически и практически возможных режимных параметрах потока;
- высокая устойчивость метода на достаточно произвольных начальных данных и при случайных "забросах" параметров в процессе установления;
- отсутствие необходимости оперативного вмешательства расчетчика (например, с целью корректировки параметров разностной схемы) в процессе установления решения.

Как известно, высокой надежностью обладают монотонные схемы. Немонотонные методы ведут себя чрезвычайно "капризно", что проявляется, в частности, в появлении отрицательных значений давления и плотности на волнах разрежения и скачках уплотнения большой интенсивности, вследствие чего дальнейшее выполнение расчета становится либо вообще невозможным, либо теряет смысл.

Недостаточная *вычислительная эффективность* может оказаться основным препятствием, не позволяющим широкое приме-

нение численного метода, если выполнение одного расчета будет требовать десятки или более часов процессорного времени на современных быстродействующих компьютерах. И хотя понятие вычислительной эффективности во многом зависит от текущего уровня развития вычислительной техники, тем не менее, необходимо стремиться к снижению времени выполнения расчета путем совершенствования методов и алгоритмов. Очевидно, что повышение точности и надежности, обеспечение монотонности разностной схемы в общем случае реализуется за счет расширения и усложнения шаблонов аппроксимации, а, следовательно, увеличивает количество используемых арифметических и логических операций, и в конечном итоге – время счета на компьютере. Кроме того, расчеты турбулентных течений при высоких числах Рейнольдса необходимо проводить на чрезвычайно мелких сетках (со сгущением в ближайшей окрестности тел), что также приводит к возрастанию времени счета. В связи с этим, использование *явных методов* часто становится неэффективным. *Неявные методы* позволяют увеличивать временной шаг интегрирования уравнений примерно в 10–20, а иногда и более, раз и их применению следует отдавать предпочтение для решения стационарных задач.

Указанным выше требованиям в принципе не удовлетворяют такие известные разностные схемы как метод крупных частиц, методы МакКормака, Бима–Уорминга и многие другие численные методы. На этом основании можно сделать вывод о нецелесообразности применения (и, по-видимому, непригодности) этих методов для решения поставленной задачи.

Из схем первого порядка достаточно хорошо себя зарекомендовала *схема С.К. Годунова* [76]. Во многом ее достоинства определяются использованием в качестве промежуточного шага решения задачи распада разрыва, что обеспечивает аппроксимацию конвективных производных исходных уравнений разностями против потока и согласованность решения с условием неубывания энтропии. Монотонность и высокая надежность схемы позволили успешно использовать ее для решения широкого класса задач газовой динамики. Модификации схемы С.К. Годунова, выполненные В.П. Колганом [79], а затем Н.И. Тилляевой [74], повысили порядок аппроксимации схемы до второго (локально) по пространству, сохранив монотонность и разности против потока.

А.Хартен [77] предложил идею построения монотонных схем повышенного порядка аппроксимации с разностями против потока, подобных схеме С.К.Годунова – В.П.Колгана, – так называемых *TVD-схем*. В основе этой идеи лежит переменный шаблон аппроксимации конвективных производных, зависящий от характера поведения решения в рассматриваемой точке пространства в текущий момент времени. С помощью TVD-принципа могут быть реализованы монотонные схемы второго и выше порядка аппроксимации (локально). Из широко распространенных TVD-схем, наверное, следует выделить близкие между собой схемы К.Рамсея [80], С.Р.Чакраварси [81], и М.Я.Иванова–Р.З.Нигматуллина [82,83], которые также построены на базе схемы С.К.Годунова и по своим свойствам превосходят другие TVD-схемы. Таким образом, схема С.К.Годунова в настоящее время переживает свое второе рождение, и при разработке схем повышенного порядка аппроксимации имеет смысл использовать идеи, положенные в ее основу. Основным и довольно-таки существенным недостатком TVD-схем является локальная аппроксимация с высоким порядком и переключение на первый порядок в окрестности локальных экстремумов.

В настоящей работе предложено семейство явных и неявных модификаций схемы С.К.Годунова второго и третьего порядка точности. Разработанные схемы являются квазимоноотонными схемами конечных объемов. Аппроксимация конвективных производных разностями против потока достигается использованием процедуры распада разрыва. Специальные ограничители первых и вторых пространственных разностных производных обеспечивают отсутствие нефизических осцилляций при сохранении, по меньшей мере, второго порядка аппроксимации во всех точках гладкого решения.

3.2. Уравнения Навье–Стокса. Приближение тонкого слоя

Нестационарное течение вязкого сжимаемого газа в проточной части турбомашин может быть описано системой уравнений газовой динамики в форме Навье–Стокса, которая включает в себя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (3.1)$$

уравнение количества движения

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot \Pi = 0, \quad (3.2)$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot (\Pi \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0, \quad (3.3)$$

где ρ – плотность; e – полная энергия единицы объема; Π – тензор напряжений; \vec{q} – тепловой поток; $\vec{V} = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w$ – вектор скорости. Рассматриваемая дивергентная или консервативная форма записи уравнений (3.1)–(3.3) непосредственно следует из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии [84, 24, 85].

Тензор напряжений для вязкой ньютоновской жидкости (напряжения линейно связаны с тензором скоростей деформации S) имеет вид

$$\Pi = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где p – давление; τ – тензор вязких напряжений. В общепринятой для тензорного исчисления форме записи компоненты тензора τ имеют вид

$$\tau_{ij} = \mu \left[S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad S_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.5)$$

Коэффициент динамической вязкости μ определяется формулой Саттерленда [24].

Полная энергия единицы объема e для совершенного газа может быть представлена в следующем виде

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{|\vec{V}|^2}{2}. \quad (3.6)$$

Тепловой поток q через градиент температуры выражается следующим образом:

$$\bar{q} = -\lambda \bar{\nabla} T. \quad (3.7)$$

Систему уравнений (3.1)–(3.7) удобно записывать в векторной форме. Кроме того, для расчета течений газа во вращающихся решетках турбомашин имеет смысл перейти в неподвижную относительно лопаток систему координат. Не останавливаясь на выводе, приведем уравнения Навье–Стокса в неинерциальной декартовой системе координат xuz , вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω относительно оси z :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = H, \quad (3.8)$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ h \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (h + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (h + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (h + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}.$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\rho v\Omega + \rho\Omega^2 r_x \\ -2\rho u\Omega + \rho\Omega^2 r_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где r_x , r_y – проекции расстояния r от оси вращения до текущей точки на оси x, y соответственно. Величина h , определяемая через ротальпию h/ρ , имеет вид

$$h = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{|\bar{V}|^2 - \Omega^2 r^2}{2}. \quad (3.9)$$

При расчете течений в сложных областях проточных частей турбомашин возникает необходимость рассматривать границы, не совпадающие в общем случае с декартовыми координатными линиями. Построенная в таких областях разностная сетка, очевидно, также не будет совпадать с координатными линиями. В этом случае, аппроксимация производных конечными разностями (особенно производных высокого порядка) и постановка граничных условий потребуют сложных, зачастую неоднозначных, интерполяционных процедур, применение которых может привести к локальной потере точности решения.

Чтобы избежать подобного снижения точности обычно выполняют преобразование физического пространства (x, y, z) к пространству (ξ, η, ζ) обобщенных криволинейных координат [69]. Область в обобщенных координатах строится так, чтобы границы в физическом пространстве совпадали с координатными линиями в пространстве обобщенных координат.

Будем рассматривать преобразование вида

$$\xi = \xi(x, y, z); \quad \eta = \eta(x, y, z); \quad \zeta = \zeta(x, y, z); \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \\ \partial/\partial \zeta \end{bmatrix} = J_* \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \\ \partial/\partial \zeta \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где J_* – матрица Якоби (якобиан) преобразования координат. Так как обычно аналитические зависимости (3.10) неизвестны, удобнее работать с обратной матрицей Якоби:

$$J = J_*^{-1} = \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Определитель обратного якобиана равен

$$|J| = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi). \quad (3.13)$$

В дальнейшем изложении под термином якобиан и символом J будет подразумеваться определитель обратного якобиана (3.13). Уравнения (3.8) в обобщенных координатах примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial QJ}{\partial t} + \frac{\partial(E\zeta_x + F\zeta_y + G\zeta_z)J}{\partial \zeta} + \frac{\partial(E\eta_x + F\eta_y + G\eta_z)J}{\partial \eta} + \\ + \frac{\partial(E\zeta_x + F\zeta_y + G\zeta_z)J}{\partial \zeta} = HJ; \end{aligned} \quad (3.14)$$

Система уравнений (3.14) взята за основу в настоящей работе для моделирования пространственных вязких течений в проточных частях турбомашин.

В некоторых случаях имеет смысл вместо уравнений (3.14) рассматривать менее сложную систему уравнений приближения тонкого слоя [66, 69, 86, 87, 88]. Оценки "вязких" членов уравнений (3.14), проведенные по малому параметру $\delta \approx 1/\sqrt{\text{Re}}$, показывают, что в окрестности стенки можно пренебречь повторными производными по направлению параллельному поверхности тела, так как они существенно меньше вторых производных по направлению, нормальному стенке [69]. Таким образом, в уравнениях тонкого слоя сохраняются все члены уравнений Эйлера и диссипативные члены в "поперечном" к потоку направлениях. Поэтому уравнения тонкого слоя занимают промежуточное место между уравнениями пограничного слоя и уравнениями Навье-Стокса.

Запишем приближение тонкого слоя для уравнений (3.14):

$$\frac{\partial QJ}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \xi} = JH, \quad (3.15)$$

где

$$\widehat{E} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho uU + p\xi_x - \frac{1}{3}\sigma_\xi \xi_x - \xi_0^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \rho vU + p\xi_y - \frac{1}{3}\sigma_\xi \xi_y - \xi_0^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \rho wU + p\xi_z - \frac{1}{3}\sigma_\xi \xi_z - \xi_0^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ (h+p)U - \frac{1}{3}\sigma_\xi U - \xi_0^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial i}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix};$$

$$\widehat{F} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho uV + p\eta_x - \frac{1}{3}\sigma_\eta \eta_x - \eta_0^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \rho vV + p\eta_y - \frac{1}{3}\sigma_\eta \eta_y - \eta_0^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \rho wV + p\eta_z - \frac{1}{3}\sigma_\eta \eta_z - \eta_0^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ (h+p)V - \frac{1}{3}\sigma_\eta V - \eta_0^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} + w \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial i}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix};$$

$$\widehat{G} = \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho uW + p\zeta_x \\ \rho vW + p\zeta_y \\ \rho wW + p\zeta_z \\ (h+p)W \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}; \\ \eta_0 &= \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}; \\ \sigma_\xi &= \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi}; \\ \sigma_\eta &= \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} + \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta}; \end{aligned}$$

$$U = u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z, V = u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z, W = u\zeta_x + v\zeta_y + w\zeta_z$$

– контравариантные компоненты скорости; $i = \gamma p / [(\gamma - 1)\rho]$ – энтальпия.

3.3. Осреднение по Рейнольдсу. Моделирование турбулентной вязкости

Считается, что нестационарные уравнения Навье-Стокса полностью описывают турбулентные течения. Но, несмотря на то, что прямое моделирование турбулентности с использованием уравнений (3.14) или (3.15), как считает большинство исследователей, позволило бы раз и навсегда демонтировать аэродинамические трубы [66], тем не менее, ни сегодня, ни в ближайшем будущем такой подход для решения серьезных прикладных задач остается невозможным. Дело в том, что временной и пространственный масштабы турбулентного движения столь малы, что требуемое количество узлов расчетной сетки и малый размер шагов по времени делают эти вычисления практически нереализуемыми на современных ЭВМ ввиду ограниченности ресурсов последних. Так, согласно [66] для разрешения движения турбулентного вихря необходимо не менее 10 узлов сетки по каждому из направлений в области им занимаемой. Масштаб самых мелких вихрей обычно по крайней мере в 1000 раз меньше размера области течения вдоль твердой поверхности. Поэтому для типичных трехмерных течений для расчетных областей с приблизительно равными протяженностями по всем направлениям может потребоваться более 10^{12} узлов сетки. В настоящее время даже на сетке, состоящей из 10^5 узлов, расчет течения обычно требует несколько часов процессорного времени современных быстродействующих компьютеров, а для моделирования нестационарных турбулентных пульсаций, очевидно, будут неприемлемы многие упрощения и ухищрения, применяемые для ускорения сходимости решений. Кроме того, потребуется использование значительно меньшего временного шага, соизмеримого с характерным временем турбулентных пульсаций. Исходя из выше сказанного, можно утверждать, что расчет мелкомасштабной структуры турбулентного течения на основе решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в задачах,

представляющих практический интерес, – дело весьма отдаленного будущего.

В настоящее время основное направление численного моделирования турбулентных течений состоит в решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (уравнений Рейнольдса). При осреднении по времени в уравнениях появляются новые члены, которые можно интерпретировать, как градиенты "кажущихся" (турбулентных или рейнольдсовых) напряжений и тепловых потоков [92], связанных с турбулентным движением. Используя гипотезу Буссинеска о линейной связи турбулентных напряжений со скоростями деформации, удастся уравнения Рейнольдса привести к виду (3.14) или (3.15) с единственным отличием, что теперь коэффициенты вязкости и теплопроводности представляют собой суммы коэффициентов ламинарных (молекулярных) и "кажущихся" (турбулентных) вязкости и теплопроводности, т.е.:

$$\mu = \mu_{lam} + \mu_{tur}; \quad \lambda = \lambda_{lam} + \lambda_{tur} = c_p \left(\frac{\mu_{lam}}{Pr_{lam}} + \frac{\mu_{tur}}{Pr_{tur}} \right). \quad (3.16)$$

Для воздуха обычно принимают $Pr_{lam} = 0,72$; $Pr_{tur} = 0,9$.

Для определения величин μ_{tur} и λ_{tur} необходимо привлечь дополнительные, обычно полуэмпирические, соотношения, которые принято называть моделью турбулентной вязкости. Существует множество таких моделей и выбор конкретной из них может оказать значительное влияние на получаемые решения. К сожалению, ни одна из существующих в настоящее время моделей не описывает с одинаковой степенью адекватности различные типы течений, хотя почти все из них более или менее приемлемо моделируют безградиентное течение в пограничном слое или взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем на плоской пластине. Поэтому, при выборе модели турбулентной вязкости, по-видимому, необходимо руководствоваться следующими критериями. Во-первых, модель турбулентной вязкости должна быть широко апробирована для рассматриваемых классов течений, чтобы имелась уверенность в удовлетворительном качественном и количественном описании ею турбулентных эффектов, причем особое внимание должно быть уделено течениям с

положительными градиентами давления. Во-вторых, модель должна быть относительно простой и удобной в вычислительном плане, т.е. легко алгоритмизироваться и опираться на параметры течения, определяемые однозначно и достаточно точно. И, наконец, в-третьих, модель должна характеризоваться высокой вычислительной эффективностью, т.е. она не должна существенно увеличивать время выполнения расчета. В настоящее время данным требованиям, по-видимому, в наибольшей степени удовлетворяют алгебраическая модель Болдуина-Ломэкса [86] и дифференциальная двухпараметрическая модель переноса сдвиговых напряжений (SST) Ментера [90]. В настоящей работе в большинстве случаев при моделировании течений в ступенях турбин используется модель Болдуина-Ломэкса и только для течений с интенсивными отрывами потока и/или большими положительными градиентами давления предпочтение отдается модели Ментера.

3.3.1. Алгебраические модели турбулентности. Модель Болдуина-Ломэкса

Основные достоинства алгебраических моделей состоят в относительной простоте их реализации для канальных течений, в высокой вычислительной эффективности, и что наиболее важно, в том, что для достаточно широкого класса течений, по крайней мере до последнего времени, они являлись единственными моделями, правильно описывающими закон стенки. Недостатки алгебраических моделей достаточно серьезные: они не учитывают или неточно учитывают предысторию, свободную турбулентность, анизотропию турбулентности, вращение, кривизну, не описывают или плохо описывают переход, плохо работают при интенсивных отрывах и больших положительных градиентах давления, являются по сути стационарными и неадекватны для нестационарных течений. Тем не менее, несмотря на эти недостатки и, по-видимому, благодаря отмеченным выше достоинствам, эти модели использовались и продолжают использоваться при численном моделировании трехмерных вязких течений газа. Из алгебраических моделей турбулентности, наверное, наиболее широко используемой при решении уравнений Рейнольдса является модель Болдуина-Ломэкса [86] – усовершенствованная и адаптированная к

численному моделированию трехмерных течений модель Себеси–Смита [91].

Модель Болдуина-Ломэкса представляет собой двухслойную алгебраическую модель вихревой вязкости. Пограничный слой на поверхности тела предполагается разделенным на две области: внутреннюю и внешнюю (рис.3.1). Во внутренней области применяется формулировка Прандтля длины пути смешения l :

$$\mu_{turb} = \mu_{turb}^i = \rho l^2 |\bar{\Omega}|, \quad (3.17)$$

где $\bar{\Omega} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ – завихренность. Длина пути смешения (линейный масштаб турбулентности) и рассчитывается с учетом демпфирующего множителя ван-Драйста:

$$l = k\eta \left[1 - \exp(-\eta^+ / A^+) \right], \quad (3.18)$$

где η – расстояние по нормали от стенки; $\eta^+ = \eta \sqrt{\rho_w / \tau_w} / \mu_w$ – безразмерное расстояние в переменных закона стенки; $\tau = \mu du/d\eta$ – касательное напряжение; k – константа Кармана; $A^+ = 26$. Индексом "w" отмечены величины, относящиеся к стенке.

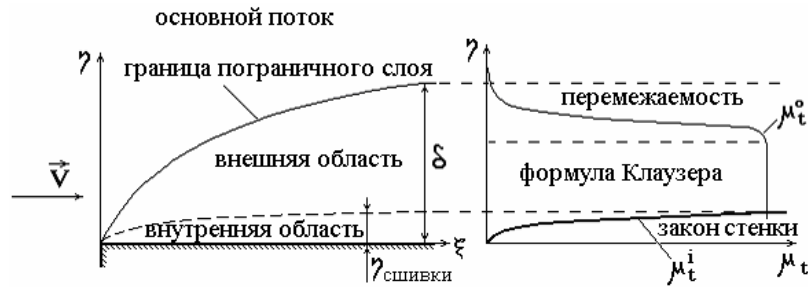


Рис. 3.1. Структура пограничного слоя (слева) и распределение турбулентной вязкости в пограничном слое (справа)

Во внешней области пограничного слоя вихревая вязкость определяется по модифицированной формуле Клаузера [66, 86]:

$$\mu_{turb} = \mu_{turb}^0 = \alpha \quad C_{CP} \quad \rho \quad F_w \quad F_k; \quad (3.19)$$

$$\text{где } \alpha = K_{CL} \frac{1.55}{1 + \varphi}, \quad \varphi = 0.55 \left[1 - \exp(-0.243\sqrt{z} - 0.298 z) \right];$$

$z = Re_\theta / 425 - 1$, $C_{CP} = 1.6$, $K_{CL} = 0.0168$ – константа Клаузера); Re_θ – число Рейнольдса, определенное по толщине потери импульса θ , F_w – функция следа; F_k – фактор перемежаемости Клебанава.

В каждой точке внешней области функция следа F_w выражена следующим образом:

$$F_w = \min(\eta_{max} F_{max}, C_w \eta_{max} U_D^2 / F_{max}), \quad (3.20)$$

где $U_D = U_{max} - U_{min}$ – разность между максимальной и минимальной полными скоростями потока на профиле скорости в текущем сечении; $C_w = 0.25$ – константа следа. Значения η_{max} и F_{max} определяются из уравнения для функции завихренности

$$F(\eta) = \eta \left| \bar{\Omega} \right| \left[1 - \exp(\eta^+ / A^+) \right] \quad (3.21)$$

Величина F_{max} представляет собой максимальное значение функции $F(\eta)$ на профиле скорости во внешней области пограничного слоя, а η_{max} – значение η , при котором $F(\eta) = F_{max}$.

Функция Клебанава F_k определена формулой

$$F_k = \left[1 + 5.5 (C_k \eta / \eta_{max})^6 \right]^{-1}, \quad (3.22)$$

где $C_k = 0.3$ – константа Клебанава.

Сшивку решений внутренней и внешней областей пограничного слоя осуществляется в ближайшей к поверхности тела точке, где $\mu_{turb}^i = \mu_{turb}^0$.

Уравнения (3.17)-(3.22) представляют собой оригинальную модель турбулентности Болдуина-Ломэкса и обычно применяются как для пристенных пограничных слоев, так и для течений в следах. Использование рассматриваемой модели для расчетов до-,

транс- и сверхзвуковых течений на пластине позволяет получать приемлемые решения. Однако для получения физически правдоподобных результатов при моделировании отрывных турбулентных течений в решетках необходимо модифицировать модель турбулентности. Согласно [92,93], при использовании стандартной модели Болдуина-Ломэкса основные неприятности возникают при расчете коэффициента турбулентной вязкости на отрывах большой интенсивности и в следе за решеткой.

На отрыве расчетный коэффициент турбулентной вязкости обычно получается заниженным [92] и течение может ламинаризоваться. В результате толщина отрывной зоны увеличится. Если внешнее течение сверхзвуковое, то рост отрывной зоны, во-первых, увеличивает интенсивность скачка уплотнения в окрестности точки отрыва, а, во-вторых, смещает его вверх по потоку. Рост интенсивности скачка перед отрывом приводит к дополнительному уменьшению коэффициента турбулентной вязкости в отрывной зоне и, следовательно, к увеличению толщины рециркуляционной области. Решение в этом случае не устанавливается и характеризуется движением скачков уплотнения и зон отрыва. В настоящей работе для стабилизации отрывных течений проводилось увеличение коэффициента C_w в рециркуляционной области согласно рекомендациям работы [92]:

$$C_w = C_w^{BL} (1 + D_w \eta_{sep} / L), \quad (3.23)$$

где C_w^{BL} – константа следа модели Болдуина-Ломэкса; η_{sep} – толщина отрывной зоны; L – характерный размер; $D_w \approx 50$ – константа.

Кроме того, на отрыве касательное напряжение τ_w стремится к нулю и это также приводит к занижению турбулентной вязкости. Чтобы избавиться от этого недостатка в отрывной зоне используется осредненное значение касательного напряжения, согласно рекомендациям работы [94]. Применение простой релаксационной процедуры, предложенной в работе [69], позволяет избежать скачков коэффициента турбулентной вязкости и в то же время учесть предысторию течения.

Серьезным недостатком модели Болдуина-Ломэкса является неоднозначность выбора максимума функции завихренности F_{\max} [95]. Очевидно, что появление завихренности потока может быть вызвано, во-первых, диссипацией энергии в пограничных слоях и следе, во-вторых, криволинейными скачками уплотнения в ядре потока и, в-третьих, всегда имеет место "схемная" завихренность, связанная с погрешностями аппроксимации. Разложить завихренность на эти три компоненты в произвольной точке течения вряд ли возможно, хотя очевидно, что функция завихренности должна зависеть только от первой из них. Однако, так как функция завихренности пропорциональна расстоянию от стенки или оси следа, то влияние второй и третьей компонент завихренности, проявляющееся в появлении "ложных" максимумов функции $F(\eta)$, может оказаться значительным, что обычно приводит к завышению коэффициента турбулентной вязкости и в его немонотонном скачкообразном изменении вдоль линии тока. В пристенных пограничных слоях преодолеть данный недостаток относительно просто, так как не представляет труда с достаточной точностью оценить толщину пограничного слоя и отсечь "ложные" максимумы функции $F(\eta)$, расположенные в невязком ядре потока. К сожалению, оценка с необходимой точностью толщины следа затруднена в связи с тем, что, во-первых, следы интенсивно размываются, а, во-вторых, за решеткой наблюдается наложение двух волн неравномерности течения: следовой, распространяющейся по направлению скорости, и неравномерности в невязком ядре потока, распространяющейся приблизительно в осевом направлении. В настоящей работе при расчете турбулентной вязкости в области дальнего следа используется формулировка Клаузера (однослойная модель). Сшивка решений осуществлялась в области ближнего следа согласно рекомендациям работы [93].

Расчет турбулентной вязкости в трехмерных пограничных слоях имеет свои особенности. Обычно в окрестности сопряжения двух стенок (например, втулки и поверхности лопатки) линейный масштаб турбулентности вычисляется специальным образом с привлечением расстояний до каждой из стенок [96]. Однако, при использовании такого подхода возникают сложности в сшивке внешней и внутренней областей пограничного слоя. Поэтому в настоящей работе применяются специальные интерполяционные проце-

дуры [97]. Конечно, в этом случае коэффициент турбулентной вязкости в окрестности взаимодействия пограничных слоев или пограничного слоя и следа определяется достаточно приближенно. Однако, в силу большой сложности течения в этих областях [98,99,61,100] применение иных подходов при "сшивке" решений, по-видимому, не позволит существенно уточнить математическое описание происходящих явлений.

Подробное описание используемой реализации модели турбулентности Болдуина–Ломэкса можно найти в работах [88,97,101,75].

3.3.2. Дифференциальные модели турбулентной вязкости. Модель SST Ментера

Считается, что дифференциальные одно- или двухпараметрические модели турбулентности точнее и, следовательно, лучше алгебраических моделей. Тем не менее, недостатки моделей этого типа достаточно серьезные. Большинство этих моделей неточно описывают пристенные течения из-за того, что они не согласованы с законом стенки, неудовлетворительно работают в отрывных зонах, оказываются недостаточно точными при положительных градиентах давления. Кроме этого, эти модели плохо учитывают сжимаемость, плохо описывают присоединение; это изотропные модели и без специальных, далеких от совершенства, модификаций они не учитывают кривизну линий тока и вращение. В вычислительном плане многие из них характеризуются плохой сходимостью в силу жесткости системы уравнений переноса турбулентности. С физической точки зрения, хотя эти модели и нестационарные, но применяются они совместно с осредненными по времени уравнениями Рейнольдса, и поэтому справедливы только в случае стационарного поведения основных характеристик турбулентности. Поэтому при выборе дифференциальной модели турбулентности необходимо проявлять определенную осторожность, тщательно взвешивая достоинства и недостатки рассматриваемых моделей. Среди дифференциальных моделей турбулентности одной из наиболее популярных и в тоже время критикуемых является двухпараметрическая k – ϵ модель. Существует множество ее модификаций, но чаще отдают предпочтение версии Лаундера и Шармы [102], которая считается более точной. Тем не менее, известно, что

при выводе уравнений k - ϵ модели опущены члены, играющие большую роль вблизи стенок [103]. В результате данная модель оказывается несогласованной с законом стенки [104, 105] и только за счет удачного выбора эмпирических констант удается добиться приемлемого описания простых безградиентных течений [104]. Другой популярной двухпараметрической моделью турбулентности является k - ω модель Уилкокса [106]. Благодаря замене переменной (диссипации турбулентности ϵ на удельную скорость диссипации или турбулентную частоту ω) удалось учесть поперечную диффузию турбулентности, существенную вблизи стенок. В результате, данная модель хорошо описывает пристенные течения, однако оказывается чрезмерно чувствительной к малым изменениям величины ω в свободном потоке на входе.

Согласно работам ряда исследователей [107,108,109] на сегодняшний день одной из наиболее перспективных новых моделей является модель переноса сдвиговых напряжений (SST) Ментера [90], представляющая собой комбинацию k - ϵ и k - ω моделей, наследующую их лучшие черты. В результате получена модель которая одинаково хорошо работает как вблизи стенок, так и в свободном потоке. Модель приемлемо описывает течения с большими положительными градиентами и интенсивными отрывами, и, кроме того, оказалась быстрее и устойчивей, чем k - ϵ и k - ω модели.

Уравнения модели турбулентности Ментера могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i} = G - D + L; \quad (3.24)$$

$$\text{где } U = \begin{bmatrix} \rho k \\ \rho \omega \end{bmatrix}; \quad R_i = \begin{bmatrix} \rho k - (\mu + \mu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ \rho \omega - (\mu + \mu_t / \sigma_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} \tau_{ij} S_{ij} \\ \gamma \rho |\vec{\Omega}|^2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} \beta^* \rho \omega k \\ \beta \rho \omega^2 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(1 - F_1) \frac{\rho}{\omega \sigma_{\omega 2}} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \end{bmatrix};$$

$$\mu_t = \frac{\rho k / \omega}{\max[1; |\bar{Q}| F_2 / (\alpha \omega)]}; \quad F_1 = th\{\min(A_1; A_2)\}^4\};$$

$$A_1 = \max(B_1; B_2); \quad A_2 = \frac{4\rho k}{C_{k\omega} \sigma_{\omega 2} n^2};$$

$$F_2 = th\{\max(2B_1; B_2)\}^2\}; \quad B_1 = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega n}; \quad B_2 = \frac{\mu}{\rho n^2 \omega};$$

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_2) \phi_2; \quad \phi = [\sigma_k, \sigma_\omega, \beta, \gamma]; \quad k - \text{кинетическая}$$

энергия турбулентности; ω – удельная скорость диссипации (псевдозавихренность); τ_{ij} – тензор рейнольдсовых напряжений; S_{ij} – тензор скоростей деформации осредненного движения; n – расстояние к ближайшей стенке. Основные константы модели следующие: $\alpha = 0,31$; $\beta^* = 0,09$; $\sigma_{k1} = 1,176$; $\sigma_{k2} = 1,0$; $\sigma_{\omega 1} = 2,0$; $\sigma_{\omega 2} = 1,168$; $\beta_1 = 0,075$; $\beta_2 = 0,0828$; $\gamma_1 = 0,553$; $\gamma_2 = 0,44$. Основной особенностью модели Ментера является переход от k - ϵ модели в ядре потока к k - ω модели вблизи стенок. Плавность этого перехода обеспечивается весовой функцией F_1 . Существенное уточнение решения для отрывных течений достигается с помощью ограничения коэффициента турбулентной вязкости по гипотезе Брэдшоу, в соответствии с которой касательные напряжения пропорциональны кинетической энергии турбулентности во всем пограничном слое. Функция F_2 вводится, чтобы избежать сингулярности в ядре потока, где завихренность может стремиться к нулю.

Уравнения (3.24) целесообразно представить в обобщенной криволинейной системе координат, координатные линии которой совпадают с физическими границами. Воспользовавшись формулами преобразования (3.10)–(3.13), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial UJ}{\partial t} + \frac{\partial(R_x \xi_x + R_y \xi_y + R_z \xi_z)J}{\partial \xi} + \frac{\partial(R_x \eta_x + R_y \eta_y + R_z \eta_z)J}{\partial \eta} + \\ + \frac{\partial(R_x \zeta_x + R_y \zeta_y + R_z \zeta_z)J}{\partial \zeta} = (G - D + L)J; \end{aligned} \quad (3.25)$$

Уравнения (3.25) имеют вид удобный для численного интегрирования.

3.4. Основные преобразования уравнений

Рассмотрим некоторые особенности уравнений (3.14) и связанные с ними преобразования. Используя правила дифференцирования сложной функции, уравнения (3.14) можно записать в недивергентной форме:

$$J \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = HJ \quad (3.26)$$

или

$$J \frac{\partial Q}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \hat{B} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \hat{C} \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = HJ, \quad (3.27)$$

где $\hat{E} = (E \xi_x + F \xi_y + G \xi_z)J$; $\hat{F} = (E \eta_x + F \eta_y + G \eta_z)J$ и $\hat{G} = (E \zeta_x + F \zeta_y + G \zeta_z)J$. Величины $\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial Q$; $\hat{B} = \partial \hat{F} / \partial Q$; $\hat{C} = \partial \hat{G} / \partial Q$ представляют собой матрицы размерностью, в общем трехмерном случае, 5×5 и называются матрицами Якоби уравнений (3.14). Далее в этом параграфе для простоты изложения в потоках E , F и G не будем учитывать тензоры вязких напряжений и температурные градиенты.

Вектор консервативных переменных dQ может быть преобразован к вектору "примитивных" переменных dq следующим образом:

$$dq = d \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \gamma_1(V^2 + \Omega^2 r^2)/2 & -\gamma_1 u & -\gamma_1 v & -\gamma_1 w & \gamma_1 \end{bmatrix} \cdot d \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ h \end{bmatrix} = TdQ, \quad (3.28)$$

где $\gamma_1 = \gamma - 1$. Умножая уравнения (3.27) на матрицу T слева, получим другую недивергентную запись

$$J \frac{\partial q}{\partial t} + T A T^{-1} \frac{\partial q}{\partial \xi} + T \hat{B} T^{-1} \frac{\partial q}{\partial \eta} + T \hat{C} T^{-1} \frac{\partial q}{\partial \zeta} = T H J$$

или

$$J \frac{\partial q}{\partial t} + A \frac{\partial q}{\partial \xi} + B \frac{\partial q}{\partial \eta} + C \frac{\partial q}{\partial \zeta} = T H J. \quad (3.29)$$

Матрицы $A = T \hat{A} T^{-1}$; $B = T \hat{B} T^{-1}$ и $C = T \hat{C} T^{-1}$ могут быть получены из матрицы

$$\mathbf{D}_\Psi = \begin{vmatrix} \mathbf{U} & \rho \Psi_x & \rho \Psi_y & \rho \Psi_z & 0 \\ 0 & \mathbf{U} & 0 & 0 & \Psi_x / \rho \\ 0 & 0 & \mathbf{U} & 0 & \Psi_y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{U} & \Psi_z / \rho \\ 0 & \gamma \rho \Psi_x & \gamma \rho \Psi_y & \gamma \rho \Psi_z & \mathbf{U} \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

заменой обозначений \mathbf{U} на U, V, W и Ψ на ξ, η, ζ соответственно. Матрицу \mathbf{D}_Ψ можно привести к диагональному виду преобразованием:

$$L_\Psi \mathbf{D}_\Psi L_\Psi^{-1} = \Lambda_\Psi, \quad (3.31)$$

где Λ_Ψ – диагональная матрица, ненулевые элементы которой являются собственными значениями матрицы \mathbf{D}_Ψ ; L_Ψ – матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы \mathbf{D}_Ψ ; L_Ψ^{-1} – матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы \mathbf{D}_Ψ . Матрицы $\Lambda_\Psi, L_\Psi, L_\Psi^{-1}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\Lambda_{\Psi} = \text{diag}(\lambda_{\Psi}^i) = \begin{vmatrix} \mathbf{U} - a\Psi_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{U} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{U} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{U} + a\Psi_0 \end{vmatrix}; \quad (3.32)$$

$$L_{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & -\hat{\Psi}_x & -\hat{\Psi}_y & -\hat{\Psi}_z & 1/(\rho a) \\ \hat{\Psi}_x a & 0 & -\hat{\Psi}_z \rho & \hat{\Psi}_y \rho & -\hat{\Psi}_x/a \\ \hat{\Psi}_y a & \hat{\Psi}_z \rho & 0 & -\hat{\Psi}_x \rho & -\hat{\Psi}_y/a \\ \hat{\Psi}_z a & -\hat{\Psi}_y \rho & \hat{\Psi}_x \rho & 0 & -\hat{\Psi}_z/a \\ 0 & \hat{\Psi}_x & \hat{\Psi}_y & \hat{\Psi}_z & 1/(\rho a) \end{vmatrix}; \quad (3.33)$$

$$L_{\Psi}^{-1} = \begin{vmatrix} \rho/(2a) & \hat{\Psi}_x/a & \hat{\Psi}_y/a & \hat{\Psi}_z/a & \rho/(2a) \\ -\hat{\Psi}_x/2 & 0 & \hat{\Psi}_z/\rho & -\hat{\Psi}_y/\rho & \hat{\Psi}_x/2 \\ -\hat{\Psi}_y/2 & -\hat{\Psi}_z/\rho & 0 & \hat{\Psi}_x/\rho & \hat{\Psi}_y/2 \\ -\hat{\Psi}_z/2 & \hat{\Psi}_y/\rho & -\hat{\Psi}_x/\rho & 0 & \hat{\Psi}_z/2 \\ \rho a/2 & 0 & 0 & 0 & \rho a/2 \end{vmatrix}, \quad (3.34)$$

где $\hat{\Psi} = \Psi / \Psi_0$; λ_{Ψ}^i – собственные значения матрицы \mathbf{D}_{Ψ} ; $a = \sqrt{\mathcal{H}/\rho}$ – скорость звука. Матрицы собственных значений и собственных векторов матриц A , B , C могут быть получены из матриц $\Lambda_{\Psi}, L_{\Psi}, L_{\Psi}^{-1}$ заменой обозначений \mathbf{U} на U , V , W и Ψ на ξ, η, ζ соответственно. Диагональная матрица Λ_{Ψ} может быть расщеплена на две знакоопределенные матрицы, у одной из которых все ненулевые элементы положительные, у другой – отри-

цательные. Наверное простейший вариант такого расщепления имеет вид:

$$\Lambda_{\psi}^{\pm} = \frac{\Lambda_{\psi} \pm |\Lambda_{\psi}|}{2}, \quad (3.35)$$

где $|\Lambda_{\psi}| = \text{diag}(\lambda_{\psi}^i)$ – диагональная матрица, ненулевые элементы которой являются абсолютными величинами собственных значений матрицы \mathbf{D}_{ψ} .

Перейдем к рассмотрению особенностей течения вязкого газа вблизи поверхности тела. Как известно, на стенках в вязкой жидкости скорость течения равна нулю. Исходные уравнения для этого случая могут быть значительно упрощены. Считая течение стационарным ($\partial/\partial t = 0$) и, используя равенство нулю скорости из уравнений (3.14), получаем соотношения на стенке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \Omega^2 r_x; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \Omega^2 r_y; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Применим преобразование координат (3.10)–(3.11), воспользуемся допущениями приближения тонкого слоя и, кроме того, пренебрежем повторными производными по направлениям ξ и ζ . Будем рассматривать отдельно два случая: поверхность тела совпадает с поверхностью $\xi\zeta$ или поверхностью $\eta\zeta$. Тогда, в первом случае получим:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial p}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} J\eta_0^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{3} \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial VJ}{\partial \eta} \right) + \rho \Omega^2 r_x \\ J\eta_0^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{3} \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial VJ}{\partial \eta} \right) + \rho \Omega^2 r_y \\ J\eta_0^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{3} \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial VJ}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Умножая (3.37) слева на матрицу обратного якобиана, получаем [110]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \eta} = & \eta_0^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial V^* J}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial VJ}{\partial \eta} \right) + \\
& + \rho \Omega^2 (r_x x_\eta + r_y y_\eta), \quad (3.38)
\end{aligned}$$

где $V^*/J = (ux_\eta + vy_\eta + wz_\eta)/J$ – ковариантная компонента скорости, соответствующая направлению η . Заметим, что если $r \perp \eta$, то последний член правой части (3.38) тождественно равен нулю. Аналогично, для стенки, совпадающей с поверхностью $\eta\zeta$, получим [110]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \xi} = & \xi_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial U^* J}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu}{J} \frac{\partial UJ}{\partial \xi} \right) + \\
& + \rho \Omega^2 (r_x x_\xi + r_y y_\xi), \quad (3.39)
\end{aligned}$$

где $U^*/J = (ux_\xi + vy_\xi + wz_\xi)/J$ – ковариантная компонента скорости, соответствующая направлению ξ .

Анализ уравнений (3.38), (3.39) в частном случае ортогональной криволинейной системы координат показывает, что поперечный градиент давления в пограничном слое может быть вызван проекцией на нормаль к стенке центробежной силы и нормальными вязкими напряжениями. Последние в безотрывном развитом пограничном слое пренебрежимо малы [69], однако в окрестности отрыва, входных кромок и в некоторых других случаях они все же могут быть значительными и ими пренебрегать не следует.

3.5. Постановка задачи с начальными и граничными условиями

Рассмотрим трехмерное течение газа в проточной части многоступенчатой турбомшины (рис. 3.2). В каждом венце будем рассматривать только по одному межлопаточному каналу, предполагая, что в остальных каналах того же венца течение в точности такое же. Данная область ограничена стенками (поверхности лопаток и меридиональных обводов) и проницаемыми границами (сечение "входа", сечение "выхода", а также элементы поверхностей меридиональных обводов, через которые осуществляются протечки и отборы рабочего тела). Существование других проницаемых границ, а именно, границ периодичности потока, отделяющих рассматриваемый межлопаточный канал от соседних, не принципиально, так как такие границы являются по сути внутренними. Течение вязкого сжимаемого газа в такой расчетной области будем описывать системами уравнений (3.14) и (3.15), которые, как известно [66], представляют собой смешанную систему *гиперболически-параболического* типа относительно времени. Таким образом, задача отыскания решения уравнений (3.14) или (3.15) в ограниченной области является *задачей с начальными и граничными условиями*.

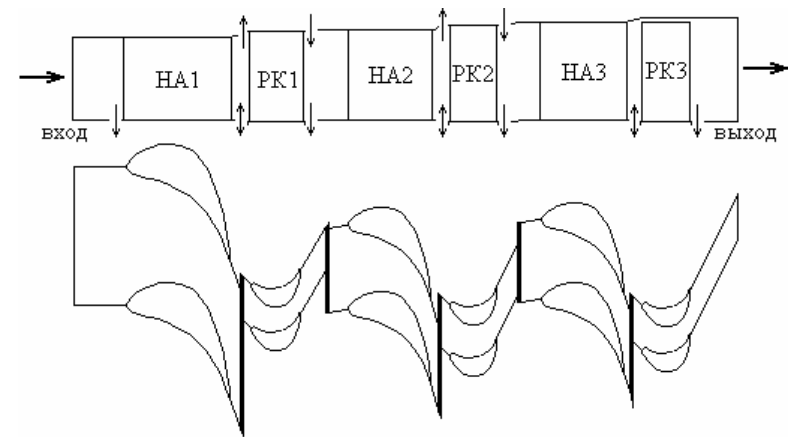


Рис. 3.2. Расчетная область

Отметим, что нестационарная форма исходных уравнений используется не только для решения нестационарных задач, но и для получения стационарных не зависящих от времени решений. Такой подход, называемый *методом установления*, применяется по следующей причине. Как известно (см. например, [66,69]), системы уравнений (3.14) и (3.15) в стационарной формулировке меняют тип при переходе скорости течения через скорость звука: они представляют собой смешанные системы эллиптически-параболических уравнений для области дозвукового течения и гиперболически-параболических уравнений для области сверхзвукового течения. Интегрирование таких систем затруднено, с одной стороны, необходимостью сшивки решений на границе между этими областями, положение которой изначально неизвестно и определяется решением, а с другой стороны, тем, что методы решения уравнений различного типа принципиально отличаются друг от друга и плохо согласуются между собой. В то же время, как уже отмечалось, нестационарная форма уравнений (3.14) и (3.15) представляет собой смешанную систему гиперболически-параболических уравнений относительно времени вне зависимости от скорости течения. Таким образом, применяя зависящую от времени процедуру интегрирования можно получить как нестационарные, так и стационарные решения исходных уравнений.

В качестве решения, получаемого методом установления, следует искать стационарное или периодически нестационарное течение, к которому асимптотически приближается нестационарный поток при заданных геометрических характеристиках области течения, граничных условиях, устанавливаемых на границах области, и достаточно произвольных начальных условиях. Сложнее дело обстоит с непериодическими решениями, которые допускаются уравнениями (3.14) и (3.15). Такие решения зависят от выбора начальных условий и, вообще говоря, могут рассматриваться как один из множества вариантов нестационарного обтекания аэродинамического объекта.

Остановимся на постановке начальных и граничных условий. Как следует из вышесказанного, стационарные и периодически нестационарные решения исходных уравнений не должны зависеть от начальных условий, которые могут задаваться достаточно произвольно. В то же время, удачный выбор начального приближения

позволяет сократить процесс установления, а значит и время выполнения расчета. Поэтому обычно рекомендуется в качестве начальных условий использовать результаты решения задачи в упрощенной, например, квазиодномерной постановке.

Сложнее дело обстоит с граничными условиями. Для уравнений Эйлера (которые легко могут быть получены из уравнений (3.14),(3.15) отбрасыванием вторых производных) вопрос постановки граничных условий более или менее прояснен. Общепринятым подходом [69,76] является рассмотрение в окрестности элемента границы s одномерного течения в нормальном к этому элементу направлении ψ . Описывающие такое течение одномерные уравнения Эйлера

$$J \frac{\partial q}{\partial t} + D_{\psi} \frac{\partial q}{\partial \psi} = 0, \quad \psi \perp s$$

являются гиперболическими и могут быть приведены к характеристическому виду умножением на матрицу L_{ψ} (3.33):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda_{\psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0; \quad \Lambda_{\psi} = \text{diag}(\lambda_{\psi}^i), \quad (3.40)$$

где $d\varphi = L_{\psi} dq$ — вектор характеристических переменных. Уравнение (3.40) представляет собой одномерные соотношения на характеристиках, причем знак λ_{ψ}^i (i -ого диагонального элемента матрицы Λ_{ψ}) определяет направление соответствующей характеристики: приходит ли она на границу из расчетной области или извне ее. Количество граничных условий, которые необходимо задать на элементе границы, должно быть равно числу характеристик, приходящих в расчетную область через данный элемент. Кроме того, параметры на границах необходимо связать с параметрами внутри области системой соотношений, обычно называемых *численными граничными условиями*. Количество численных граничных условий должно быть равно числу характеристик, приходящих на элемент границы из расчетной области. Очевидно, что для корректной постановки задачи в качестве граничных условий не могут быть заданы величины, переносимые на границу вдоль

характеристик из расчетной области, а в качестве численных граничных условий недопустимо использовать соотношения на характеристиках, приходящих на границу извне расчетной области. В остальном, выбор граничных условий может быть достаточно произвольным. Однако необходимо помнить, что неудачная реализация граничной процедуры может существенно замедлить процесс установления и даже привести к неустойчивости решения.

Количество граничных условий на проницаемых границах расчетной области определяется величиной нормальной скорости, так как собственные значения λ_{ψ}^i , согласно (3.32), представляют собой линейные комбинации нормальной компоненты скорости потока U/ψ_0 и скорости звука a . Итак, из (3.32) и (3.40) получаем, что для m -мерного течения ($m = 1, 2, 3$) на границе, через которую газ втекает в расчетную область ("вход") с дозвуковой скоростью, необходимо задать $m+1$ граничное условие. На границе, через которую дозвуковой поток вытекает из расчетной области ("выход") требуется задать только одно условие. В случае сверхзвукового течения на входной границе необходимо выставить $m+2$ условия (то есть задать все независимые газодинамические параметры), а на выходной — ни одного. Для нахождения в граничных точках остающихся неизвестными газодинамических параметров необходимо привлечь дополнительные соотношения. Обычно используются экстраполяционные формулы или, что предпочтительней, соотношения на характеристиках.

Выбор величин, задаваемых в качестве граничных условий на проницаемых границах, достаточно произволен. Следует помнить, что, во-первых, корректная постановка задачи, а, во-вторых, наиболее быстрая сходимость обеспечиваются, если на границах фиксируются величины, переносимые вдоль характеристик (инварианты Римана), приходящих извне расчетной области, а для замыкания используются соотношения на характеристиках, приходящих из расчетной области. В этом случае, возмущения, генерируемые процессом установления, не отражаются от границ, не могут привести к неустойчивости в граничных точках и не замедляют установления. К сожалению, такие граничные условия не всегда удобны, так как, с одной стороны, для определения инвариантов необходимо знать решение на границах, а с другой стороны, фик-

сация инвариантов на границах, очевидно, не означает фиксацию "примитивных" переменных (давления, плотности и компонент скорости) или заторможенных параметров (полных давления и температуры), по которым эти инварианты рассчитывались.

Для описываемых уравнениями Эйлера внутренних течений через аэродинамические решетки уже стала традиционной следующая постановка граничных условий. В случае дозвукового течения на входе задаются полное давление и температура, и углы, определяющие направление потока. При дозвуковой осевой скорости на выходе выставляется статическое давление. При сверхзвуковой осевой скорости на входе фиксируются все "примитивные" переменные и, тем самым, полностью определяется течение, а на выходе граничные условия не задаются. Полные параметры и углы могут быть заданы как в абсолютной (неподвижной), так и в относительной (движущейся вместе с вращающейся решеткой) системе координат.

Отдельно должен быть рассмотрен случай сверхзвукового течения на входе с осевой дозвуковой скоростью, для которого описанный выше одномерный анализ характеристик неприменим. Согласно направляющему свойству решетки [13], которое возникает благодаря геометрической периодичности области течения, при заданном сверхзвуковом режиме обтекания существует *единственно возможный угол* натекания потока на решетку. При отклонении угла от единственно возможного перед решеткой образуется периодическая система волн сжатия и разрежения, которые стремятся развернуть поток "правильным" образом. Фиксация направления потока в связанной с решеткой системе координат для сверхзвукового течения является некорректной [124], так как препятствует осуществлению такой обратной связи, и приводит либо к реализации дозвукового течения при том же перепаде давления (заданный угол больше единственно возможного) или к неограниченному росту скорости на входе (заданный угол меньше единственно возможного). В этом случае, обычно, вместо угла натекания фиксируют, тем или иным способом, окружную компоненту скорости на входе.

На твердых стенках при решении уравнений Эйлера требуется задать только одно граничное условие — условие непротекания, то

есть равенство нулю нормальной к элементу границы s компоненты скорости:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0; \quad \vec{n} \perp s.$$

Для замыкания на стенке обычно используют либо характеристические соотношения, либо проекцию на нормаль уравнения количества движения [66,69,76].

Так как уравнения Навье–Стокса не являются гиперболическими, то проведенный выше характеристический анализ граничных условий к ним, строго говоря, неприменим. Теоретически обоснованные граничные условия в этом случае до сих пор не установлены. Поэтому обычно руководствуются физическими соображениями.

Так, с физической точки зрения для вязкого газа на стенке должны быть заданы следующие условия [24,69]:

равенство нулю скорости потока (условие прилипания):

$$|\vec{V}| = 0$$

и либо температура стенки, если она охлаждается или подогревается:

$$T = T_w,$$

либо отсутствие теплового потока через поверхность тела, если стенка теплоизолированная:

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

Давление на стенке обычно определяется из условия [87]

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0,$$

которое справедливо для тонких пограничных слоев, а плотность рассчитывается из уравнения состояния $p = \rho RT$. В настоящей работе для нахождения давления на поверхности тела, обтекаемого вязким газом, предлагается использовать более точные соотношения (3.38), (3.39). Некоторые исследователи используют на твердых стенках так называемые условия "отражения", т.е. в фиктивной ячейке, построенной от границы внутрь твердого тела, задаются те же параметры, что и в соседней со стороны потока ячейке, с тем отличием, что компонентам скорости приписывается

противоположный знак. Анализ соотношений (3.38), (3.39) показывает, что такие условия некорректны, так как справедливы только для безградиентных пограничных слоев.

Корректная формулировка граничных условий на проницаемых границах для вязких сжимаемых течений значительно сложнее. До сих пор нет полной ясности в отношении количества требуемых условий и их вида, хотя и имеются первые попытки решить этот вопрос обычно для упрощенных уравнений Навье–Стокса: линеаризованных, частично-параболизированных или приведенных к симметричной форме [69,112,113,114,115].

В ряде работ, посвященных численному моделированию вязких потоков при больших числах Рейнольдса, для уравнений движения вязкого газа сохранена процедура постановки граничных условий, принятая для уравнений Эйлера, но дополненная "мягкими" условиями для производных от "примитивных" переменных по направлению, соответствующему направлению течения [69,112,114]:

$$\frac{\partial q}{\partial \psi} = 0. \quad (3.41)$$

В принципе это согласуется с выводами работы [113], в которой предложены "мягкие" граничные условия для линейных комбинаций этих производных.

Для проницаемых границ при решении уравнений приближения тонкого слоя, по-видимому, должно быть достаточно граничных условий, соответствующих уравнениям Эйлера, так как все "вязкие" производные по направлению течения отброшены. Поэтому локальный одномерный анализ уравнений в окрестности элемента проницаемой границы входа или выхода приведет к тем же выводам, что и для случая невязкого газа. Действительно, в ряде работ [116,117 и др.] такой подход позволил получить хорошие результаты.

Исходя из вышесказанного в настоящей работе при постановке граничных условий на проницаемых границах "входа" и "выхода" для течений при высоких числах Рейнольдса, описываемых уравнениями тонкого слоя (3.15), как и в работах [116,117], применяется процедура постановки граничных условий, соответствующая уравнениям Эйлера, которая излагалась выше. При

решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (3.14), кроме того, на проницаемых границах задаются условия для производных примитивных переменных (3.41)

Остановимся на вопросе постановки граничных условий для турбулентных течений. Очевидно, что при использовании алгебраических моделей турбулентности типа модели Болдуина–Ломэкса дополнительные граничные условия не требуются. Для моделей турбулентности, описываемых дифференциальными уравнениями, в принципе, применимы рассуждения приведенные выше.

На стенках для модели турбулентности Ментера будем использовать традиционный подход, согласно которому величина кинетической энергии турбулентности считается равной нулю, $k=0$, а турбулентная частота определяется из асимптотического соотношения [90]:

$$\omega = \frac{60\mu_w}{\rho_w \beta n_1^2},$$

где n_1 – расстояние по нормали от стенки до ближайшей расчетной точки.

На границах типа "вход" для модели турбулентности Ментера, используемой в настоящей работе, требуется задание дополнительных двух величин – кинетической энергии турбулентности k и турбулентной частоты ω . Кроме того, на проницаемых границах всех типов необходимо задание мягких граничных условий вида (3.41). Задание кинетической энергии турбулентности k оказывается весьма удобным, так как эта величина может быть непосредственно связана со степенью турбулентности течения. В большинстве работ, посвященных вопросу моделирования турбулентных течений, для двухпараметрических моделей используются такие или же очень близкие граничные условия, когда вместо турбулентной частоты ω на "входе" задается масштаб турбулентности, величина физически более представимая, но настолько же неоднозначно определяемая. Очевидно, что такая постановка граничных условий имеет серьезные недостатки. Во-первых, задаваемые таким образом величины k и ω , в общем случае, соответствуют неравновесному состоянию турбулентности и в ближайшей окрестности входной границы следует ожидать существенной перестройки турбулентного течения. В результате степень

турбулентности перестроившегося потока может значительно отличаться от заданной. Во-вторых, с помощью таких граничных условий неудобно учитывать изменение турбулентности вдоль входной границы, вызванные существованием на входе пограничных слоев. В-третьих, как уже отмечалось, турбулентная частота и масштаб турбулентности являются величинами, которые не могут быть определены для реальных течений с достаточной степенью точности.

В настоящей работе предлагается отказаться от задания неоднозначно определяемых величин на входе и строить решение на границе, исходя из условия локальной равновесности турбулентности. В этом случае турбулентная частота на входе имеет вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{\Phi}{\beta^*}}, \quad (3.42)$$

где согласно упрощенному представлению производства турбулентности в модели Ментера [107, 118] $\Phi = \Omega^2$ или в соответствии с гипотезой Като-Лаундера [N17] $\Phi = S\Omega$; $S = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}$. Для повышения надежности вычислений, в настоящей работе предлагается использовать объединенную формулу

$$\Phi = \max(S\Omega, \Omega^2). \quad (3.43)$$

В свободном потоке кинетическая энергия турбулентности может быть выражена через степень турбулентности Tu и невозмущенную скорость U_∞

$$k = \frac{3}{2} (Tu \cdot U_\infty)^2. \quad (3.44)$$

Если входная граница пересекает равновесный пограничный слой, то кинетическая энергия турбулентности в пограничном слое может быть записана как [119]:

$$k = l^2 \Omega \omega, \quad (3.45)$$

где $l = \min(\kappa y, \beta^* \delta)$ – длина смешения, $\kappa=0.41$ – константа Кармана, δ – толщина пограничного слоя. Комбинируя (3.44) и (3.45) получим окончательно

$$k = \max \left[\frac{3}{2} (Tu \cdot U_{\infty})^2, l^2 \Omega \omega \right]. \quad (3.46)$$

Соотношения (3.42), (3.43) и (3.46) используются в настоящей работе для постановки граничных условий на входных границах для уравнений модели турбулентности Ментера.

На выходе значения k и ω экстраполируются на границу расчетной области из прилегающих к этой границе расчетных точек.

3.6. Явно-неявная ENO схема повышенной точности

Для численного решения задачи пространственного нестационарного течения газа через решетки турбомашин необходимо выполнить *дискретизацию* области течения (рис. 3.3) и исходных уравнений. Осуществляется это следующим образом. Расчетная область "разрезается" на конечное число малых подобластей, называемых ячейками разностной сетки. Форма ячеек сетки, вообще говоря, может быть произвольной. Однако, для удобства обработки и хранения информации, простоты алгоритма и программы расчета, целесообразно выбрать упорядоченное, регулярное разбиение. По-видимому, наиболее простым и удобным является разбиение области на шестигранные ячейки с условными направлениями сеточных линий: радиальным ξ , окружным η и "потокосовым" ζ (рис. 3.3). Криволинейную систему координат удобно выбрать таким образом, чтобы сеточные поверхности совпадали с координатными поверхностями. Так как такую систему координат для области с произвольными границами построить аналитически практически невозможно, то она строится локально для каждой точки расчетной области. Ячейки области упорядочиваются нумерацией по каждому из сеточных направлений. Согласно такой нумерации каждой ячейке и грани сетки могут быть поставлены в соответствии три числа (два для двумерной области): целые числа i, j, k (номера в радиальном ξ , окружном η и "потокосовом" ζ направлениях соответственно) – для ячейки и одно полуцелое число и два целых, например, $i + 1/2, j, k$ – для грани (рис.3.3). Целые числа для граней характеризуют координатную поверхность, в которой лежит данная грань. В дальнейшем для обозначения газодинамических пара-

метров и геометрических характеристик, относящихся к ячейкам или граням, будем использовать выбранную нумерацию в качестве нижних индексов у соответствующих величин.

Так как решение задачи будет осуществляться интегрированием исходных уравнений по времени, необходимо выполнить дискретизацию по временной координате. Будем рассматривать дискретные моменты времени, которые могут быть определены по начальному моменту t^0 и шагу интегрирования τ следующим образом:

$$t = t^0 + n\tau = t^{n-1} + \tau$$

Целое число n обычно называется номером временного слоя и, в дальнейшем, будет использоваться как верхний индекс в обозначениях, зависящих от времени дискретных величин. Например, обозначение $p_{i,j+1/2,k}^{n+1}$ соответствует давлению на временном слое $n+1$ на грани, являющейся общей для ячеек i,j,k и $i,j+1,k$. Дискретизация исходных уравнений осуществляется следующим образом. Проинтегрируем уравнения (3.14) или (3.15) по объему элементарной ячейки i,j,k и воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса для преобразования объемного интеграла к поверхностному и теоремой о среднем для перехода от непрерывных функций к дискретным средним значениям в ячейках и на гранях [76]. После элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \delta Q_{i,j,k}^{n+1} &= Q_{i,j,k}^{n+1} - Q_{i,j,k}^n = -\frac{\tau}{(\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta J)_{i,j,k}} \times \\ &\times \left[(\hat{E}^n \Delta\eta\Delta\zeta)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (\hat{E}^n \Delta\eta\Delta\zeta)_{i-\frac{1}{2},j,k} + \right. \\ &+ (\hat{F}^n \Delta\xi\Delta\zeta)_{i,j+\frac{1}{2},k} - (\hat{F}^n \Delta\xi\Delta\zeta)_{i,j-\frac{1}{2},k} + \\ &\left. + (\hat{G}^n \Delta\xi\Delta\eta)_{i,j,k+\frac{1}{2}} - (\hat{G}^n \Delta\xi\Delta\eta)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Рассмотрим аппроксимацию векторов потоков $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ в правой части уравнений (3.47). В схеме С.К.Годунова [76] газодинамические потоки на гранях ячеек, выраженные через "примитивные" переменные согласно формулам (3.8), (3.14), (3.15) рассчитываются с использованием алгоритма решения задачи распада

разрыва [76]. Построенная таким образом явная схема является устойчивой, монотонной и аппроксимирует исходные уравнения с первым порядком точности по пространству и времени. Применение в схеме решения распада разрыва обеспечивает аппроксимацию конвективных производных разностями против потока и согласованность решения с условием неубывания энтропии.

Интегрирование уравнений Рейнольдса в виде (3.14) или (3.15) с помощью оригинальной схемы С.К.Годунова (3.47) нецелесообразно в связи с низкой ее точностью.

Повышение точности схемы (3.47) будем выполнять с помощью идеи о монотонном ENO восполнении численного решения в пределах каждой ячейки расчетной области [120,77,121,122,123,124].

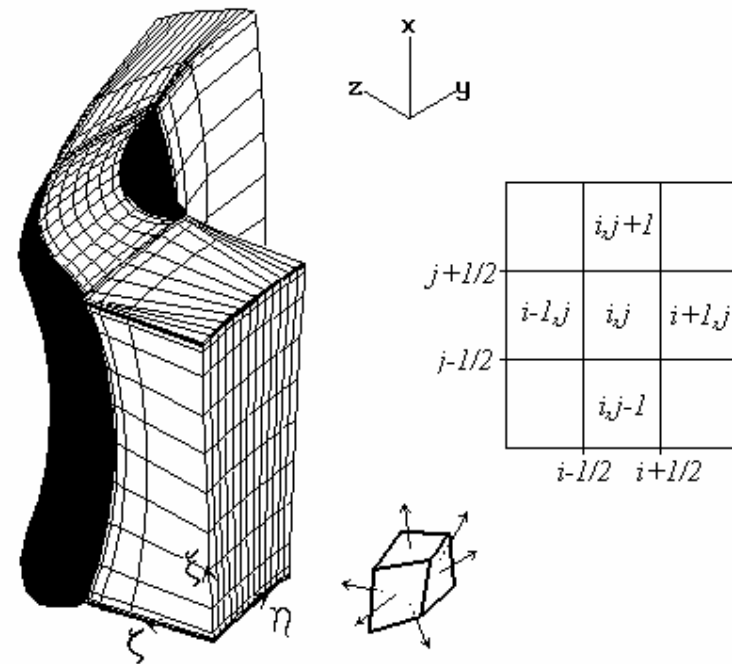


Рис.3.3 Разностная сетка и криволинейная система координат

При определении начальных условий для задачи распада разрыва на грани ячейки будем использовать пространственно-временное распределение в ячейке:

$$q(\xi, \eta, \zeta) = q_m + \left(\frac{\partial q}{\partial \xi} \right)_m (\xi - \xi_m) + \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \right)_m (\eta - \eta_m) + \left(\frac{\partial q}{\partial \zeta} \right)_m (\zeta - \zeta_m); \quad (3.48)$$

Выбор криволинейной системы координат значительно упрощает расчет производных по пространству по сравнению со схемой Годунова–Колгана [79,74], для которой, по-видимому, впервые было предложено использовать похожее распределение параметров внутри ячеек. Пространственные производные по сеточным направлениям будем определять независимо друг от друга по следующему алгоритму (формулы записаны для равномерной сетки; не меняющиеся вдоль сеточной линии ψ индексы опущены):

$$\Delta_m \varphi = L_\psi \Delta_m q; \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)_m &= \frac{1}{\Delta \psi} \minmod[\Delta_m \varphi + \\ &+ \alpha \minmod(\Delta_m \varphi - \Delta_{m-1} \varphi, \Delta_{m+1} \varphi - \Delta_m \varphi), \\ &\Delta_{m+1} \varphi - \beta \minmod(\Delta_{m+1} \varphi - \Delta_m \varphi, \Delta_{m+2} \varphi - \Delta_{m+1} \varphi)]; \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \psi} \right)_m = L_\psi^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)_m; \quad (3.51)$$

$$\minmod(A, B) = \text{sign}(A) \max\{0, \min[|A|, B \text{sign}(A)]\};$$

$$\psi = [\xi, \eta, \zeta];$$

где $\Delta q = q_m - q_{m-1}$; α и β – константы. Формулы для конкретного сеточного направления могут быть получены заменой в (3.49)–(3.51) обозначений ψ на ξ, η, ζ и m на i, j, k соответственно. Переход к характеристическим переменным в (3.49) гарантирует

отсутствие ложных осцилляций в распределениях газодинамических параметров и не допускает снижения энтропии на интенсивных скачках, которое может быть причиной "развала" решения.

Выбор констант определяет конкретную разностную схему. При $\alpha = \beta = 0$ реализуется TVD-схема локально второго порядка аппроксимации по пространству и времени близкая к схеме С.К.Годунова–В.П.Колгана. Если $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то, благодаря поправкам – вторым разностям, появляется возможность обеспечения как минимум второго порядка во всех точках гладкого решения. Так, при $\alpha = \beta = 1/2$ получаем ENO-схему второго порядка по пространству и времени. Пятиточечный шаблон пространственных производных в формуле (3.50) оказывается достаточным для построения схемы локально третьего порядка аппроксимации, которая получается при $\alpha = 2\beta = 2/3$. Такая схема в критических точках переключения шаблона аппроксимации переходит не на первый порядок (как схемы С.Р.Чакраварси [81], М.Я.Иванова–Р.З.Нигматулина [83] и К.Рамсея [80]), а только на второй порядок аппроксимации.

Применение рассмотренных выше квазимоноотонных схем для интегрирования уравнений Навье–Стокса (3.14),(3.15) и модели турбулентности (3.25) имеет следующую особенность. При аппроксимации диффузионных членов уравнений имеет смысл задействовать уже известные наклоны кусочно-линейного распределения параметров по ячейкам. Так, например, величина $(\mu \partial u / \partial \eta)$ на грани $\xi \zeta$ может быть рассчитана линейной интерполяцией (индексы i, k , не меняющиеся вдоль сеточной линии η , опущены):

$$(\mu \partial u / \partial \eta)_{j+1/2} = \frac{\eta_{j+1/2} - \eta_j}{\eta_{j+1} - \eta_j} (\mu \partial u / \partial \eta)_{j+1} + \frac{\eta_{j+1} - \eta_{j+1/2}}{\eta_{j+1} - \eta_j} (\mu \partial u / \partial \eta)_j. \quad (3.52)$$

Для ENO-схем такой подход обеспечивает аппроксимацию диффузионных членов со вторым порядком точности и не только существенно экономит память и время расчета, упрощает алгоритм по сравнению с центрально-разностными аппроксимациями [81], но и гарантирует повышенную устойчивость решения. Очевидно, что для TVD-схем при использовании уравнения (3.52) возможна потеря аппроксимации диффузионных членов в точках, где про-

исходит переключение шаблона схемы. Заметим, однако, что такая потеря аппроксимации может и не оказать существенного влияния на решение, так как в этих же точках происходит переход на первый порядок аппроксимации конвективных производных, и решение и без того формируется в результате преобладающего влияния схемной вязкости.

Необходимо подчеркнуть, что при расчете вязких течений предпочтение следует отдавать ENO-схемам. Негативные последствия локальной аппроксимации решений TVD-схемами будут тем существеннее, чем сложнее структура потока. Для реального обтекания пространственных геометрически сложных объектов количество физических особенностей в течении может быть настолько большим, что расчет в большинстве расчетных точек будет выполняться с первым порядком точности, а расчетчик не будет этого и подозревать. Поэтому в настоящей работе все расчеты двумерных и трехмерных течений выполнены по ENO-схемам второго или третьего порядка по пространству.

Аппроксимация, монотонность и устойчивость семейства квазимоноотонных ENO схем (3.47)–(3.51) подробно исследованы в работе [124].

Основным, характерным для явных методов, недостатком рассматриваемого семейства квазимоноотонных схем является недостаточно высокая вычислительная эффективность. Далее рассматриваются основные пути ускорения сходимости (повышения вычислительной эффективности) численного метода.

Как уже отмечалось, приемлемой вычислительной эффективностью характеризуются неявные схемы. Различными авторами разработан ряд неявных схем на базе схемы С.К.Годунова [83,76,81,125 и др.]. В настоящей работе применяется неявный оператор Бима–Уорминга–Стегера [126,87], записанный в дельта-форме с факторизацией по пространству, диагонализацией матриц Якоби исходных уравнений. Основное преимущество такого подхода, используемого также в работах [83,81], состоит в отсутствии необходимости принципиального изменения алгоритмов и программ, реализующих явные численные методы. Неявный метод строится с помощью дополнительного этапа вычислений, производимого после определения вектора приращений консервативных переменных δQ по явному методу (уравнение (3.47)).

Следуя работам [122, 123, 126, 124], неявный этап вычислений будем записывать следующим образом:

1) переход к "примитивным" переменным

$$\delta \tilde{q}^n = \frac{1}{1+\chi} T \delta Q^n + \frac{\chi}{1+\chi} \delta q^n; \quad (3.53)$$

2) неявный шаг по направлению ξ

$$L_\xi^{-1} \left[I + \frac{\tau \vartheta}{(1+\chi)J} \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi^+ + A_\xi^-) \right] L_\xi \delta q^{n+1/3} = \delta \tilde{q}^n; \quad (3.54)$$

3) неявный шаг по направлению η

$$L_\eta^{-1} \left[I + \frac{\tau \vartheta}{(1+\chi)J} \frac{\partial}{\partial \eta} (A_\eta^+ + A_\eta^-) \right] L_\eta \delta q^{n+2/3} = \delta \tilde{q}^{n+1/3}; \quad (3.55)$$

4) неявный шаг по направлению ζ

$$L_\zeta^{-1} \left[I + \frac{\tau \vartheta}{(1+\chi)J} \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_\zeta^+ + A_\zeta^-) \right] L_\zeta \delta q^{n+1} = \delta \tilde{q}^{n+2/3}; \quad (3.56)$$

5) вычисление "примитивных" переменных на следующем $(n+1)$ временном слое

$$q^{n+1} = q^n + \delta q^{n+1}, \quad (3.57)$$

где $I = \text{diag}(1)$ – единичная матрица; $A_\psi^\pm = (A_\psi + |A_\psi|)/2$; $|A_\psi| = \text{diag}(|\lambda_\psi^i|)$; $\chi = 1/2$ и $\theta = 1$ – константы. В целом разностная схема получается трехслойной за счет использования $\delta \tilde{Q}^{n-1}$, приращений консервативных переменных с прошлого временного слоя. Двухслойный вариант схемы второго порядка с $\theta = 1/2$ и $\chi = 0$, обладающий худшими скоростью сходимости и устойчивостью, в настоящей работе не используется.

Производные в формулах (3.54)–(3.56) заменяются разностями против потока, например

$$\left[\frac{\partial}{\partial \psi} (A_{\psi}^{+} + A_{\psi}^{-}) \right]_m \delta \varphi_{\psi} = \frac{(A_{\psi}^{+} \delta \varphi_{\psi})_m - (A_{\psi}^{+} \delta \varphi_{\psi})_{m-1}}{\psi_m - \psi_{m-1}} + \frac{(A_{\psi}^{-} \delta \varphi_{\psi})_{m+1} - (A_{\psi}^{-} \delta \varphi_{\psi})_m}{\psi_{m+1} - \psi_m} \quad (3.58)$$

Особенностью данного алгоритма является обращение неявного оператора, заключенного в квадратные скобки в формулах (3.54)–(3.56). Для этих целей используется скалярная прогонка, описание которой можно найти, например, в монографии [127].

Заметим, что при расчетах по факторизованной неявной схеме всегда наблюдалась устойчивость решений. Временной шаг при этом обычно выбирался соответствующий числу Куранта

$$\nu = \tau \max_{i,j,k,l} (|\lambda'_{\psi}| / \Delta \psi)_{i,j,k}$$

порядка 12–16. Приемлемая в практическом отношении сходимость решений достигается при проведении вычислений на ЭВМ с одинарной точностью.

Для ускорения сходимости метода целесообразно выполнять расчет на последовательности вложенных сеток по упрощенному многосеточному алгоритму. В этом случае при установлении решения на грубой сетке, результат переносится на более мелкую сетку с помощью линейной интерполяции. Затем вычисления продолжаются, и данная процедура повторяется, пока не будет достигнуто установление на самой мелкой сетке. В отличие от многосеточного алгоритма работы [128] интерполяция решения с мелкой сетки на грубую не производится. Близким к оптимальному является использование трех уровней сетки: грубой, промежуточной и мелкой. При этом в трехмерном случае каждая грубая ячейка содержит восемь ячеек промежуточной сетки, а каждая ячейка промежуточной сетки – восемь ячеек мелкой. Такая процедура расчета позволяет приблизительно в 3–5 раз сократить время установления решения.

При решении стационарных задач для ускорения сходимости имеет смысл использовать переменный по пространству временной шаг интегрирования. В этом случае величина шага по времени выбирается таким образом, чтобы число Куранта было приблизительно постоянным для всех ячеек области. Такой подход просто необходим, если сетка состоит из ячеек с существенно (на порядок и более) различными размерами.

При решении задач турбулентного течения в решетках при использовании неявной схемы, квазимногосеточного подхода и переменного по ячейкам временного шага достигается сокращение времени счета более чем на два порядка.

3.7. Численная реализация. Комплекс программ *FlowER*

Описанная выше постановка задачи и численный метод реализованы в виде комплекса программ *FlowER* [53]. Комплекс программ *FlowER* предназначен для расчетов трехмерных течений вязкого газа в изолированных венцах, ступенях и многоступенчатых турбомашинах. Необходимо подчеркнуть, что кроме представленных в настоящей работе возможностей, данный комплекс программ позволяет

- моделировать вызванные взаимным движением решеток периодически нестационарные течения в многоступенчатых турбомашинах;
- рассчитывать обтекание двумерных решеток;
- рассматривать течение несовершенного газа (например пара) и т.д.

Комплекс программ *FlowER* написан на алгоритмическом языке FORTRAN-77 применительно к операционным системам Windows 2000, Windows NT, OS/2, UNIX/LINUX, MS-DOS, Windows Millennium, Windows 98, Windows 95. Программные единицы комплекса, связанные общим ядром, могут быть условно разделены на 4 группы (см. рис. 3.4):

- 1) подготовка геометрических и газодинамических исходных данных (работа в диалоговом режиме с визуализацией геометрии проточной части);
- 2) построение расчетной сетки: расчет координат узлов и метрики сетки с визуализацией сеточных поверхностей;

- 3) газодинамика: расчет начального приближения и расчет течения;
- 4) визуализация результатов газодинамических расчетов: построение графиков, изолиний и векторов скорости.

Процедуры построения геометрии расчетной области и газодинамические программы реализованы как самостоятельные 32-х разрядные программные единицы, что позволяет использовать их под управлением других программных комплексов. В настоящей работе данные программные модули используются в комплексе программ *Optimus*, предназначенном для численной оптимизации пространственной формы лопаточных аппаратов турбинной ступени.

Комплекс программ *FlowER* опирается на базу данных, структура которой схематически дана на рис. 3.5. Такая база данных позволяет нескольким пользователям одновременно проводить расчеты в различных проточных частях на различных сетках при различных режимах течения и разными методами.

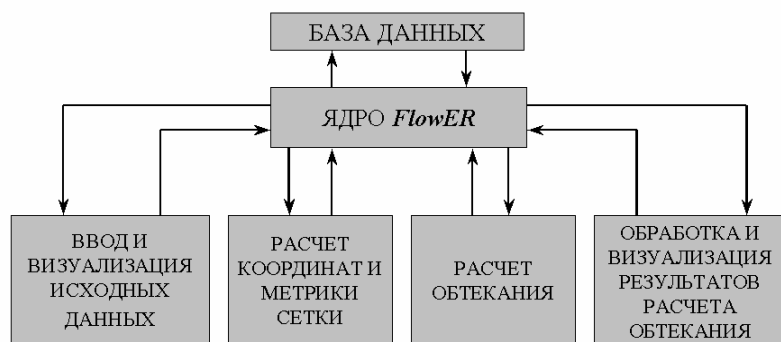


Рис. 3.4. Структура комплекса программ *FlowER*

Расчет вязкого течения в изолированном пространственном венце на сетке 300000 ячеек требует 36 М свободной оперативной и дисковой памяти и около 5 часов ПЭВМ Pentium II 400.

Расчет вязкого течения в ступени турбины на сетке 400000 ячеек требует 48 М свободной оперативной и дисковой памяти, и около 10 часов ПЭВМ Pentium II 400.

Количество требуемой памяти может быть приближенно оценено следующим образом: каждые 1000 ячеек требуют 0.12 М

для стационарной постановки и 0.22 М – для нестационарной постановки.

При расчете нестационарного течения в ступени установление периодического течения достигается обычно после прохождения 7–8 периодов. Для сетки 300000 ячеек в ступени обычно на один период приходится около 1000 итераций.

Приведенное время счета – условное и дано для благоприятных безотрывных течений или течений с небольшими отрывами. При расчете течений с сильными и особенно пульсирующими отрывами время счета может довольно-таки существенно возрасти.

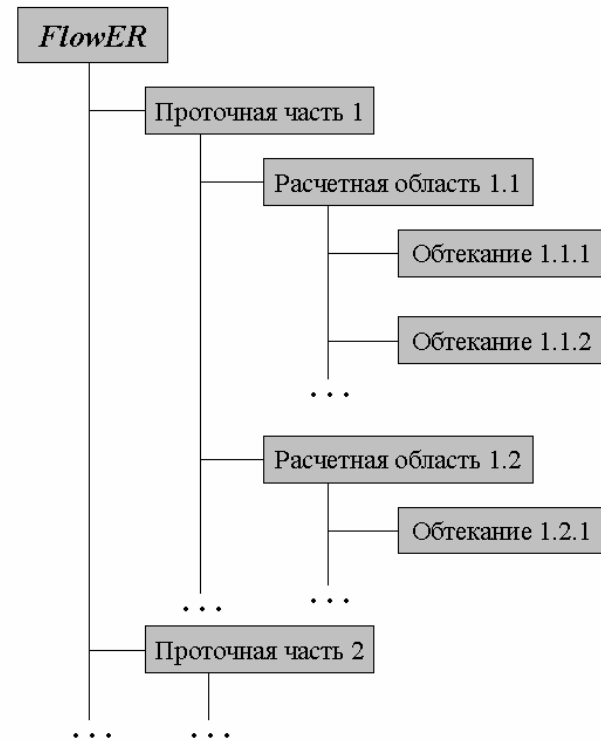


Рис. 3.5. База данных комплекса *FlowER*

Комплекс программ прошел тщательное тестирование на компьютерах различного типа. Тестирование включало в себя

а) проверку его функционирования в различных операционных системах;

б) решение тестовых одномерных, двумерных и трехмерных задач и сопоставление с точными и численными решениями других авторов;

в) расчеты реальных многоступенчатых турбомашин и сопоставление с экспериментом, в том числе и на тестовых конфигурациях, представляемых Европейским научным обществом по моделированию течения, турбулентности и горения (ERCOTAC).

Тестирование показало работоспособность комплекса программ, его достаточную надежность и точность результатов.

3.8. Расчет обтекания решеток и ступеней турбомашин

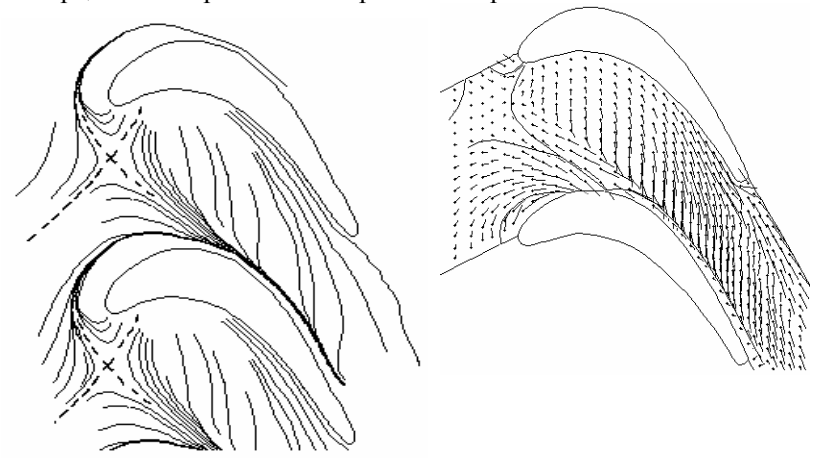
С помощью описанного выше численного метода выполнено большое количество расчетов трехмерных вязких течений в изолированных решетках, ступенях и многоступенчатых турбомашинах. Проведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных (если последние имелись). В настоящем разделе представлен анализ отдельных полученных и проанализированных результатов.

3.8.1. Течение в решетке Лэнгстона

Выполнен расчет вязкого течения в прямой решетке, экспериментально исследованной Лэнгстоном и соавторами [129]. Использовалась разностная сетка $32 \times 64 \times 88$ (180224 ячейки). В силу симметрии течения по высоте канала расчетная область ограничивалась половиной длины лопатки. Расчет выполнялся с использованием модели турбулентности Болдуина–Ломэкса.

Рассчитанные векторы скорости на торцевой поверхности даны на рис. 3.6. Видно, что одна ветвь подковообразного вихря распространяется к стороне разрежения, а другая – к стороне давления. Кроме того, вблизи стороны разрежения видна предельная линия тока, разделяющая канальный и угловой вихри. Соответствующее приторцевое течение, полученное экспериментально Лэнгстоном, также показано на рис. 3.6. Рассчитанные

предлагаемым методом и экспериментальные изолинии давления на торцевой поверхности изображены на рис. 3.7.



эксперимент [129] *FlowER*
Рис. 3.6. Векторы скорости и предельные линии тока на торцевой поверхности решетки Лэнгстона

На рис. 3.8 приведены векторы скорости и изолинии статического давления в межлопаточном канале решетки на расстоянии 0,821 ширины решетки от входных кромок. Здесь и далее начало векторов (центр ячейки) обозначается точкой, направление и величина вектора – направленным отрезком, исходящим из этой точки. В угловой зоне, образованной торцевой поверхностью и стороной разрежения наблюдаются канальный и угловой вихри. В целом можно отметить приемлемое согласование расчетных и экспериментальных данных.

3.8.2 Течение в решетке Ходсона

Выполнены тестовые расчеты вязкого течения в прямой решетке, экспериментальное исследование которой проведено Ходсоном и Домини [130]. Использовалась разностная сетка 36x60x88 (190080 ячеек). В силу симметрии течения по высоте канала расчетная область ограничивалась половиной длины лопатки. Расчет выполнялся с использованием модели турбулентности Болдуина–

Ломэкса. Векторы скорости на поверхностях лопатки даны на рис. 3.9. Линии отрыва и присоединения показаны схематично

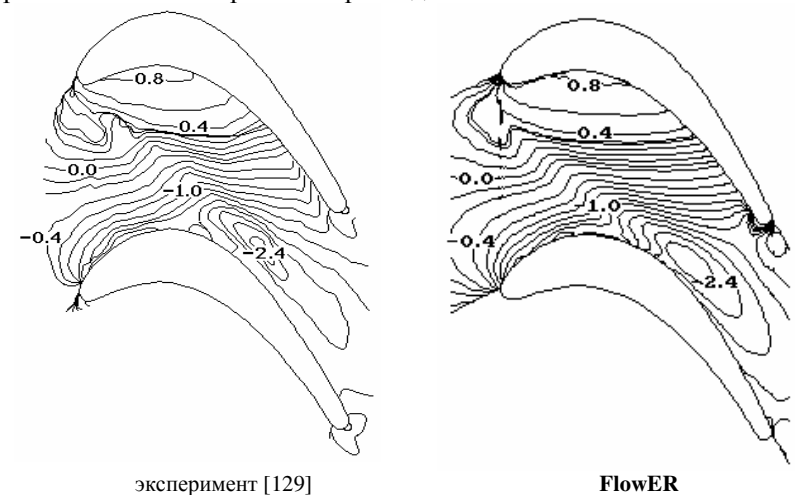


Рис. 3.7. Изолинии статического давления на торцевой поверхности решетки Лэнгстона

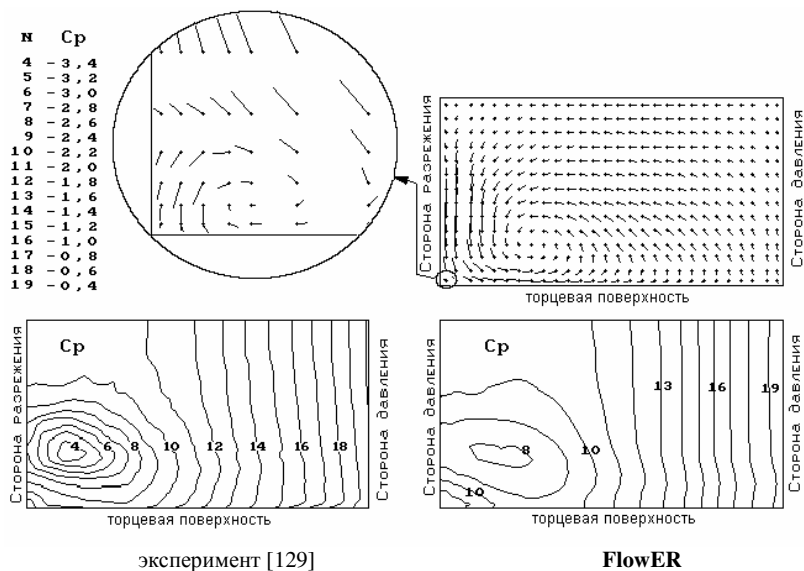


Рис. 3.8. Векторы скорости и изолинии статического давления в межлопаточном канале решетки Лэнгстона

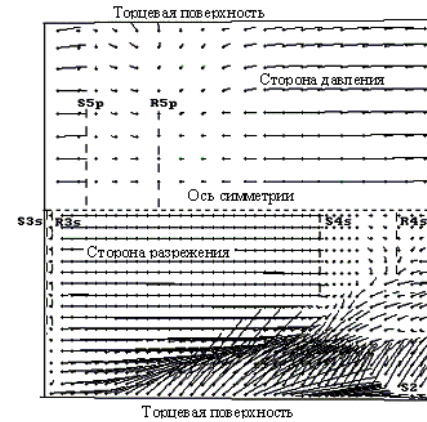


Рис. 3.9. Течение на поверхностях лопатки Ходсона (FlowER).

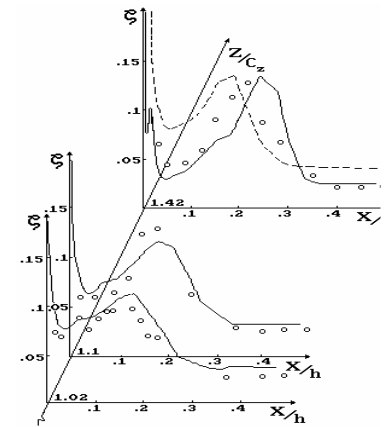


Рис. 3.10. Распределение потерь полного давления по длине лопатки на различных расстояниях от выходных кромок.
 — FlowER;
 расчет [56];
 ○ эксперимент [96]

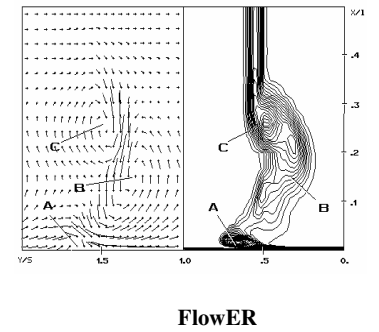
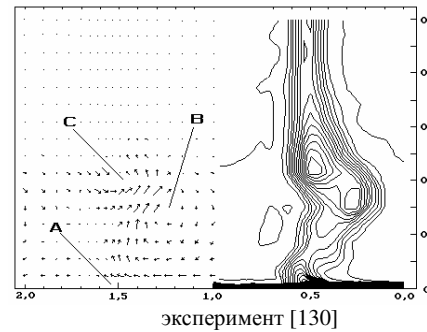


Рис. 3.11. Изолинии потерь полного давления и векторы скорости на выходе решетки Ходсона.

штриховыми линиями *S* и *R* соответственно. Положение отрывов, полученное в расчете, соответствует экспериментальным данным

[130]. Распределение потерь полного давления по длине лопатки приведено на рис. 3.10. На рис. 3.11 даны рассчитанные векторы скорости вторичных течений и изолинии потерь полного давления на выходе решетки. Символами А, В и С отмечены соответственно канальный и угловой вихри, а также свернувшийся в вихрь след. Соответствующие опытные данные, полученные Ходсоном и Домини [130], также представлены рис. 3.11.

Таким образом, численные результаты, полученные для решеток Ходсона и Лэнгстона, соответствуют физическим представлениям о трехмерных вязких течениях в решетках, хорошо количественно и качественно согласуются данными экспериментов.

3.8.3. Течение в рабочем колесе компрессора Rotor37

Рабочее колесо компрессора Rotor37 характеризуется высокой нагруженностью (степень повышения давления около 2,1), малым запасом устойчивости по расходу (8% от режима запираания) и большой скоростью вращения (1780 с^{-1}). При обтекании лопаток Rotor37 на всех режимах наблюдаются интенсивные скачки уплотнения и отрывные зоны. Все это обуславливает сложность численного моделирования обтекания, и в связи с этим расчет течения в решетке Rotor37 стал общепризнанным тестом для проверки аэродинамических кодов. По мнению многих ведущих зарубежных специалистов в области вычислительной аэродинамики программы расчета вязких трехмерных течений в турбомашинах, не прошедшие успешно проверку данным тестом, не могут использоваться при проектировании.

В данной работе приводятся результаты расчета течения в решетке Rotor37 с привлечением модели турбулентности Ментера. При расчетах по модели Болдуина—Ломэкса на режиме запираания не достигнута ни удовлетворительная инженерная точность по потерям и степени повышения давления, ни качественно правильная картина обтекания. Более того, для режимов близких к границе устойчивости вообще не удалось получить решение. Это объясняется, по-видимому, низкой точностью описания алгебраической моделью отрывов при больших положительных градиентах давления.

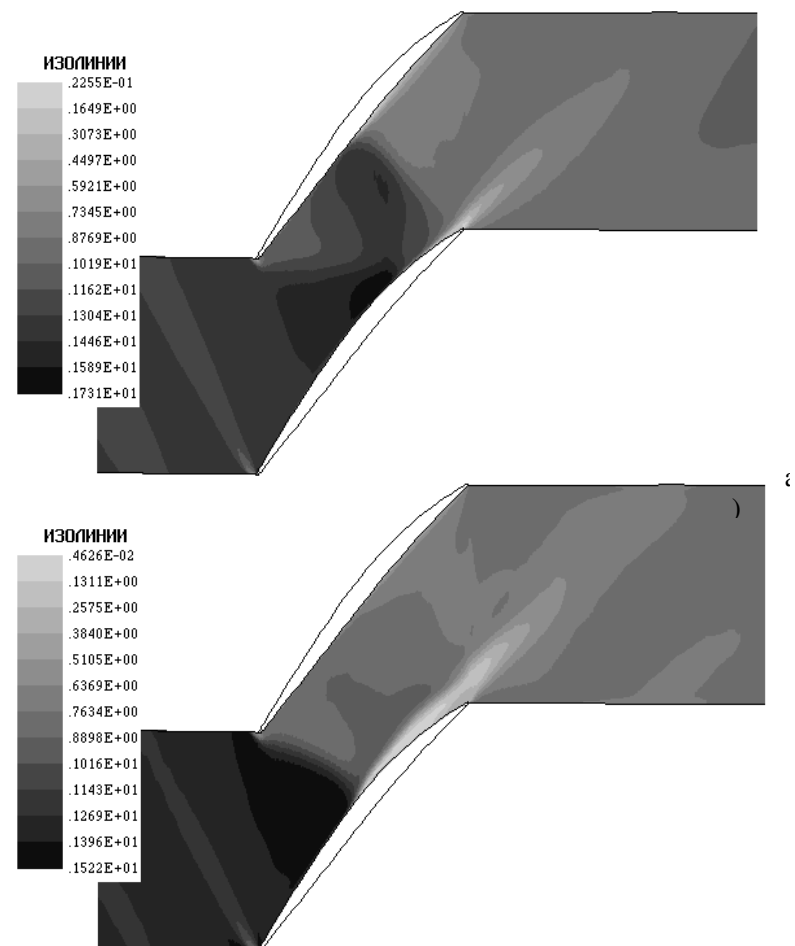


Рис. 3.12. Изолинии чисел Маха в среднем сечении рабочего колеса Rotor37
а) режим запираия; б) режим 98% расхода

На рис. 3.12,а показаны изолинии числа Маха в среднем сечении решетки при запираии (100% расхода). Наблюдается сложная структура скачков уплотнения, включающая два скачка на входных кромках, отраженный и замыкающий скачок. Изолинии числа Маха для режима 98% расхода даны на рис. 3.12,б. Видно, что все внутриканальные скачки на этом режиме слились в один практи-

чески прямой скачок, за которым на стороне разрежения образуется отрывная зона. Как показывают численные результаты, по мере уменьшения расхода (увеличения нагруженности) величина отрывной зоны увеличивается, что в конечном итоге приводит к потере устойчивости. Качественно численные результаты согласуются с данными работы [62].

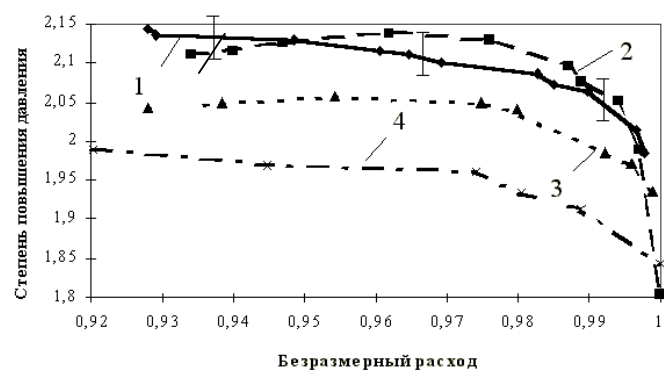


Рис. 3.13. Зависимость степени повышения полного давления от безразмерного расхода через рабочее колесо Rotor37:
1 — эксперимент [62]; 2 — **FlowER**; 3 — метод Ч.Хирша [131];
4 — метод Дж.Дентона [62]

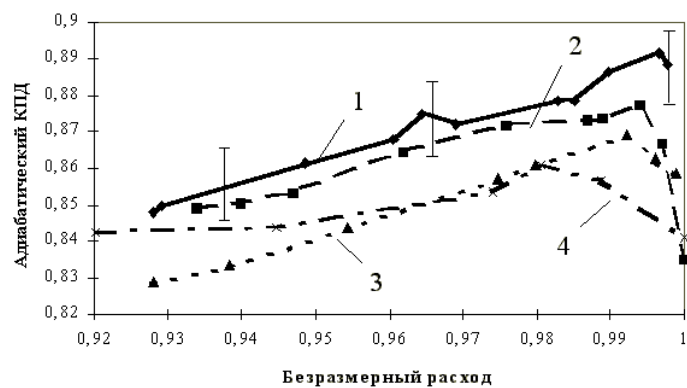


Рис. 3.14. Зависимость адиабатического КПД от безразмерного расхода через рабочее колесо Rotor37:
1 — эксперимент [62]; 2 — **FlowER**; 3 — метод Ч.Хирша [131] 4 — метод Дж.Дентона [62]

На рис. 3.13 показана зависимость степени повышения полного давления от расхода, полученная численно в сопоставлении с экспериментальными данными и результатами других авторов. Аналогичный график для адиабатического КПД приведен на рис. 3.14. На обоих графиках обозначена погрешность эксперимента [62]. Как видно, результаты, полученные с помощью комплекса **FlowER**, укладываются в погрешность эксперимента во всем рассматриваемом диапазоне по расходу для степени повышения давления и на большей части диапазона для адиабатического КПД.

3.8.4. Течение в ступени турбины

Выполнены расчеты трехмерных вязких течений в ступени турбины. Изолинии чисел Маха в среднем сечении проточной части показаны на рис. 3.15. На рис. 3.16 даны изолинии полного давления на выходе статора и ротора. Канальный, угловой вихри и след отмечены символами А, В и С соответственно. Видно, что след от ротора размывается у корня и периферии существеннее, чем след от статора. Этот эффект вызван вращением следа относительно обводов.

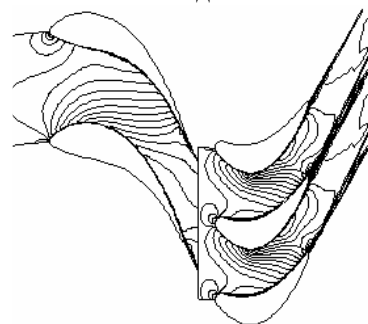


Рис. 3.15. Изолинии чисел Маха в среднем сечении ступени турбины (**FlowER**).

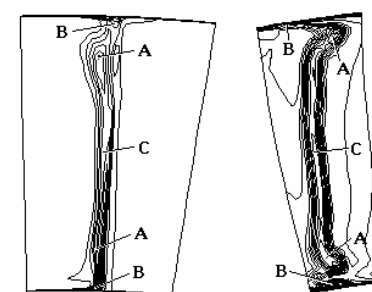


Рис. 3.16. Изолинии полного давления на выходе статора и ротора (**FlowER**).

3.8.6. Течение в многоступенчатых машинах

Выполнены расчеты течения в цилиндре низкого давления паровой турбины. Всего в проточной части было одиннадцать венцов. Расчеты проводились на сетке 11x56x52x80 (2562560 ячеек). Использовалась модель турбулентности Болдуина–Ломэкса. На

отдельных участках меридиональных обводов задавались условия протекания для моделирования надбандажных и междисковых протечек, а также отборов рабочего тела из проточной части. На рис. 3.17 показаны векторы скорости в меридиональном сечении проточной части.

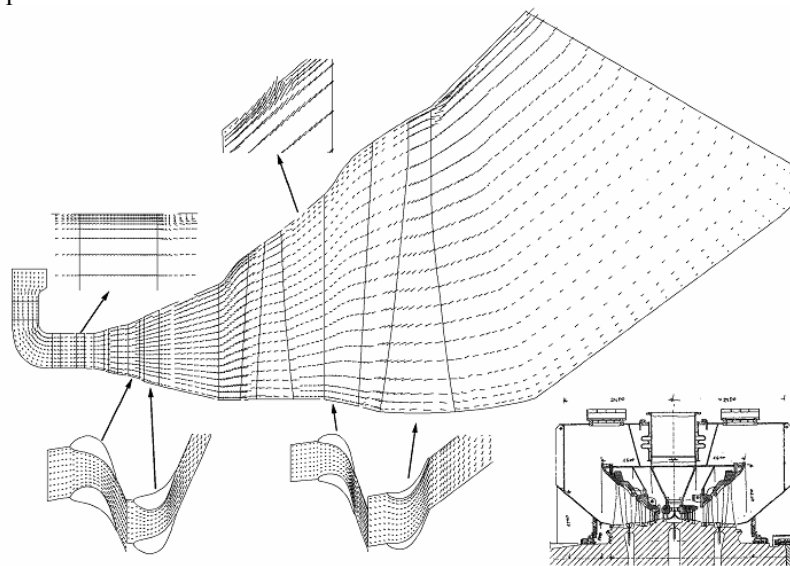


Рис. 3.17. Векторы скорости в меридиональном сечении цилиндра низкого давления паровой турбины (расчет трехмерного течения по **FlowER**)

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

4.1. Общие сведения об экстремальных задачах

4.1.1 Классификация методов оптимизации

Для решения задач с единственным критерием оптимальности разработаны строгие математические методы. Они весьма многочисленны, но не существует метода, позволяющего наилучшим образом решить любую экстремальную задачу. Поэтому специалист,

занимающийся оптимальным проектированием, должен обладать определенной математической эрудицией, чтобы в соответствии с особенностями математической постановки задачи выбрать адекватный метод ее решения.

Первый признак, по которому экстремальные задачи разделяются на две большие группы, – это **тип критерия оптимальности**. В общем случае речь идет об оптимизации *функционала*, т. е. такого соотношения, которое ставит в соответствие некоторой функции число. Грубо говоря, функционал является «функцией от функции». Примерами функционала могут служить

$$I(y(x)) = \int_0^1 y(x) dx, \quad I(u(x)) = \max_{x \in [0,1]} |u(x)| \text{ и т. д.}$$

Методы оптимизации функционалов изучаются в курсах вариационного исчисления и теории оптимального управления. Функцию можно рассматривать как частный случай, однако методы отыскания экстремума функций изучаются специальной дисциплиной, называемой нелинейным программированием. Ряд методов, например, динамическое программирование, может быть использован для отыскания экстремумов как функционалов, так и функций. Прямые методы вариационного исчисления – одного из разделов теории экстремальных задач для функционалов – сводят задачу отыскания экстремума функционала к оптимизации функций.

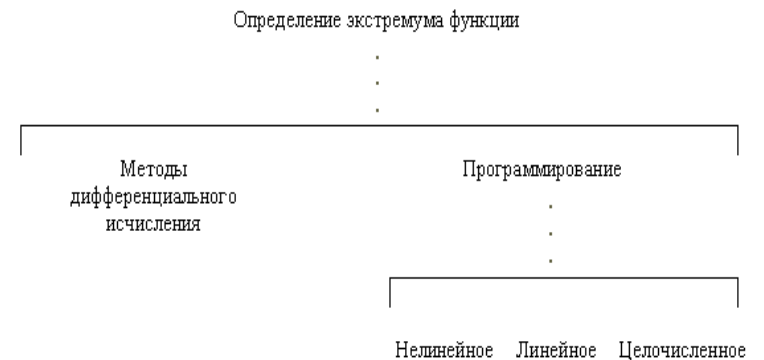


Рис. 4.1. Классификация методов отыскания экстремума функции

Существуют *аналитические* и *численные методы* отыскания оптимальных решений. Как правило, реальные задачи решаются только численно и лишь в некоторых случаях удастся получить аналитическое решение. Задачи отыскания экстремума могут содержать *непрерывные* и *целочисленные переменные*. Для последнего случая разработаны специальные методы: целочисленное программирование, дискретное динамическое программирование и др. (рис. 4.1, 4.2).

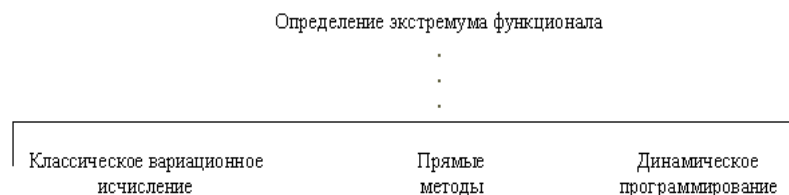


Рис. 4.2. Классификация методов отыскания экстремума функционала

Приведенная классификация, безусловно, не может претендовать на полноту, поскольку имеется множество подходов к решению оптимизационных задач. Некоторые из них конкретизированы в дальнейшем изложении. Акцент сделан на тех методах, которые применяются при решении конкретных задач проектирования проточных частей турбомашин.

4.1.2 Оптимизация функций с помощью дифференцирования

Нахождение экстремума функции одной или нескольких переменных возможно методами дифференциального исчисления [16]. Говорят, что точка \hat{x} доставляет функции $f(x)$ *локальный максимум*, если найдется такое число $\varepsilon > 0$, при котором из неравенства $|x - \hat{x}| < \varepsilon$ следует неравенство $f(x) \leq f(\hat{x})$. Функция называется *одноэкстремальной (унимодальной)*, если она имеет единственный экстремум, и *многоэкстремальной (мультимодальной)*, если она имеет более одного экстремума. Точка, в которой функция имеет наибольшее или наименьшее значение из всех локальных экстремумов, называется точкой *глобального экстремума*.

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции одной переменной дает известная **теорема Ферма**: пусть $f(x)$ - функция одной переменной, дифференцируемая в точке \hat{x} . Если \hat{x} - точка локального экстремума, то $f'(\hat{x}) = 0$.

Точки, в которых выполнено это соотношение, называются *стационарными*. Стационарные точки не обязательно являются точками экстремума. Достаточные условия максимума и минимума функции одной переменной – соответственно $f''(\hat{x}) < 0$, $f''(\hat{x}) > 0$.

Прежде чем перейти к изложению необходимых и достаточных условий экстремума функций многих переменных, введем некоторые определения.

Градиентом функции $f(x)$ называется вектор

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$\nabla^T f(x)$ обозначает вектор-строку

$$\nabla^T f(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right\}.$$

Квадратная матрица вторых производных

$$\nabla^2 f(x) = h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей Гессе*, или гессианом функции $f(x)$.

Действительная симметричная матрица H называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $x^T H x > 0 (< 0)$ для каждого набора действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , не все из которых равны нулю.

Необходимыми условиями того, что \hat{x} - точка локального экстремума функции n переменных $f(x)$, $x \in E^n$, являются следующие: 1) функция $f(x)$ дифференцируема в \hat{x} ; 2) $\nabla f(x) = 0$, т. е. \hat{x} - стационарная точка; достаточные условия того, что \hat{x} - точка локального экстремума, кроме «1», «2», включают также следующие: 3) матрица Гессе является положительно (отрицательно) определенной в точке минимума (максимума), т.е. $\hat{x}^T H \hat{x} > 0 (< 0)$. Если матрица Гессе положительно (отрицательно) определена для всех $x \in E^n$, это является достаточным условием одноэкстремальности функции. Для проверки знакоопределенности матрицы A применяется *критерий Сильвестра*, согласно которому необходимым и достаточным условием положительной определенности является выполнение n неравенств:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

а для отрицательной неопределенности

$$-a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

4.1.3 Задачи на условный экстремум функции

Рассмотренный случай предполагал определение экстремума функции в неограниченной области изменения переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Если на оптимизируемую функцию накладываются дополнительные условия (связи), говорят о задаче на **условный**

экстремум [50]. В общем случае требуется найти экстремум $f(x)$, $x \in E^n$ при ограничениях

$$\begin{aligned} h_j(x) &= 0, j = 1, \dots, m; \\ g_j(x) &\geq 0, j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для решения задачи (4.1) только лишь с ограничениями в виде равенств используется **метод множителей Лагранжа**, который основывается на введении функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(x), \text{ где } \lambda_j - \text{неопределенные множители}$$

Лагранжа. Запишем необходимые условия оптимальности в задаче на условный экстремум с ограничениями в виде равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Они представляют собой систему $n + m$ уравнений, из которой могут быть определены x_i , $i = 1, \dots, n$, λ_j , $j = 1, \dots, m$. Строгое доказательство условий Лагранжа излагается в специальных руководствах [50]. Пояснить смысл метода можно следующим образом. С одной стороны, для всех x , которые удовлетворяют ограничениям $h_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, m$, очевидно, $L(x, \lambda) = f(x)$. С другой стороны, точка экстремума функции Лагранжа также удовлетворяет этим условиям (второе уравнение (4.1)), поэтому, находя экстремум $L(x, \lambda)$, одновременно получаем и условный экстремум $f(x)$. Для решения вопроса о наличии в стационарной точке локального экстремума следует в задаче на условный экстремум разложить функцию Лагранжа в ряд Тейлора при условии удовлетворения связей $h_j(x) = 0$

$$f(\hat{x} + \xi) - f(\hat{x}) = L(\hat{x} + \xi, \hat{\lambda}) - L(\hat{x}, \hat{\lambda}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j + o(\|\xi\|^2), \quad (4.3)$$

причем согласно (4.2) первое слагаемое в правой части равняется нулю.

Разложение функции $h_j(x)$ в ряд Тейлора в окрестности стационарной точки \hat{x} дает

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \xi_i + o(\|\xi\|^2) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости, записываем (4.3), (4.4) в виде

$$f(\hat{x} + \xi) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j; \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \xi_i = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если из второго уравнения (4.5) можно выразить зависимые переменные $\xi_i, i = 1, \dots, m$ через независимые $\xi_k, k = m+1, \dots, n$, то, подставив их в первое уравнение (4.5), получим квадратичную форму относительно независимых приращений ξ_{m+1}, \dots, ξ_n . Для того, чтобы стационарная точка \hat{x} являлась локальным условным минимумом (максимумом), достаточно, чтобы она была положительно (отрицательно) определенной.

4.1.4. Оптимизация при ограничениях в виде неравенств

Классические методы отыскания условного и безусловного экстремумов функций, рассмотренных в подразделах 4.1.2, 4.1.3, в некоторых случаях позволяют решать и задачи с ограничениями в виде неравенств.

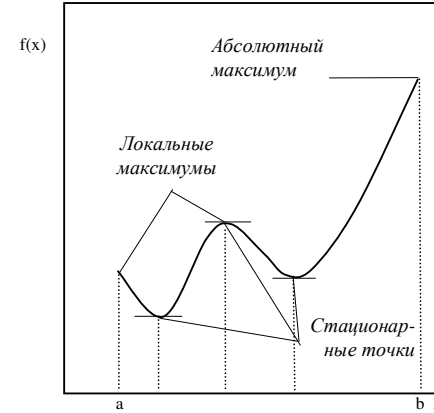


Рис. 4.3. К определению экстремума функции одной переменной в интервале

Пусть стоит задача отыскания максимума функции одной переменной $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$. Используя необходимые условия экстремума, находим корни уравнения $f'(x) = 0$, лежащие внутри интервала $[a, b]$; проверяем достаточные условия максимума $f''(\hat{x}) < 0$ и выбираем точки, соответствующие максимуму. Кроме того, вычисляем значения функции на границах отрезка, где она может принимать большие значения, чем внутри интервала (рис. 4.3).

Перейдем теперь к случаю нескольких переменных и рассмотрим задачу оптимизации: найти максимум $f(x)$, $x \in E^n$ при ограничениях:

$$\begin{aligned} h_j(x) &= 0, \quad j = 1, \dots, m < n; \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

На первом этапе решения с помощью метода множителей Лагранжа находим все стационарные точки, лежащие в положительном октанте n -мерного пространства и выделяем из них точки максимума на основании достаточного условия экстремума. Затем исследуем границу положительного октанта, приравнявая поочередно к нулю во всевозможных сочетаниях одну, две, ..., $n - m + 1$ переменных и решая каждый раз оптимизационную задачу с ограничениями в виде равенств. В результате такого вычислительного процесса, трудоемкость которого очевидна, выбирается наибольший из всех максимумов.

Более общая задача, т. е. найти максимум

$$f(x), \quad x \in E^n \quad (4.7)$$

при ограничениях $h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m; g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, p$, может быть сведена к только что рассмотренной введением дополнительных переменных $y_i, i = 1, \dots, p$, таких, чтобы

$$g_i(x) - y_i = 0, y_i \geq 0. \quad (4.8)$$

Экстремум может достигаться внутри области, где $y_i > 0$, или на ее границах, где $y_i = 0, i = 1, \dots, p$. Функция Лагранжа для задачи условной оптимизации (4.7), (4.8) имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_{m+i} (g_i(x) - y_i).$$

В точке оптимума ее частные производные по x_j, y_j, λ_j равны нулю, в том числе

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = \hat{\lambda}_{m+j} = 0, j = 1, \dots, p.$$

Это условие означает, что если в точке экстремума $\hat{y}_j > 0$, то $\hat{\lambda}_{m+j} = 0$, напротив, при $\hat{y}_j = 0$, т. е. на границе области, $\hat{\lambda}_{m+j} \neq 0$, так как соответствующее ограничение надо учитывать.

Таким образом, доказано свойство $\hat{y}_j \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, j = 1, \dots, p$. Оче-

видно, что задача (4.7), (4.8) полностью идентична (4.6) и может решаться тем же способом.

Для задачи могут быть написаны необходимые условия оптимальности (обобщенное правило множителей Лагранжа), впрочем, крайне редко используемые из-за сложности решения получающейся системы уравнений.

4.2. Нелинейное программирование

4.2.1. Предмет нелинейного программирования

Нелинейное программирование – раздел прикладной математики, занимающийся отысканием экстремума функции многих

переменных при наличии нелинейных ограничений в виде равенств и неравенств, т. е. решением задачи (4.7), рассмотренной в подразделе 4.1.4. Классические методы оптимизации входят в него вместе с такими дисциплинами, как линейное, квадратичное, сепарабельное программирование. Однако наибольший практический интерес для нас представляют *численные, или прямые, методы* нелинейного программирования, особенно интенсивно разрабатываемые в последние годы. Ни один из предложенных алгоритмов не является абсолютно лучшим, поэтому выбор того или иного численного метода диктуется содержанием конкретной задачи, которую приходится решать. Численные методы классифицируются по некоторым особенностям постановки задачи (без ограничений, с ограничениями в виде равенств, неравенств и т. п.), по характеру методов решения (например, с использованием или без использования производных), по типу вычислительных машин, языку программирования и т. п. [16].

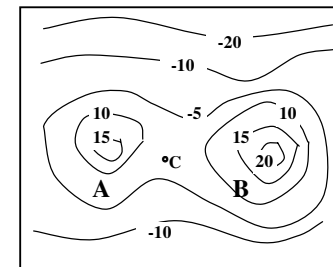


Рис. 4.4. Линии уровня функции двух переменных

Задача оптимизации в случае двух независимых переменных имеет наглядный геометрический смысл. В плоскости переменных x_1, x_2 целевая функция $f(x)$ может быть задана своими *линиями уровня* (рис. 4.4). Возле каждой из них ставится число – значение функции. Подобно этому, как это принято в топографии, можно говорить о вершинах (экстремумах) функции, оврагах, плато и других особенностях. В частности, точки *A, B* обозначают локальные экстремумы, причем второй из них является глобальным,

сгущение линий уровня свидетельствует о наличии обрыва, а их разрежение означает равнину или плато. В точке C достигается минимум по координате x_1 и максимум – по x_2 , т. е. C является *седловой точкой*. Ограничения в виде равенств и неравенств также наглядно представляются в плоскости независимых переменных.

4.2.2. Поиск экстремума функции одной переменной

Ряд методов отыскания экстремума функции многих переменных использует в качестве составной части процедуру **одномерной оптимизации**. В случае многоэкстремальной функции одной переменной единственным правильным методом отыскания глобального экстремума является непосредственный *перебор* ряда значений с некото-

рым шагом в области ее изменения. Очевидно, что чем резче может изменяться функция, тем более мелким должен выбираться шаг сетки. После грубого определения окрестности экстремума приступают к поиску его точного значения. Для этой цели служат алгоритмы одномерного поиска экстремума унимодальных функций в заданном интервале.

Одним из наиболее эффективных является так называемый **метод золотого сечения**. Напомним, что если отрезок разделить на две части таким образом, чтобы отношение длин меньшей к большей равнялось отношению длины большей части к длине всего отрезка, получим так называемое золотое сечение, равное примерно 0,38 : 0,62. Метод золотого сечения как раз и основывается на многократном делении интервала неопределенности, т. е.

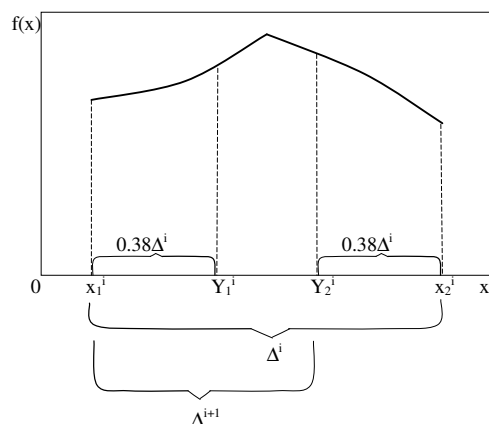


Рис. 4.5. К отысканию экстремума функции одной переменной методом золотого сечения

интервала, в котором заключен экстремум, в соответствующем отношении. Последовательность работы алгоритма при поиске максимума понятна из рис. 4.5. Пусть в некотором приближении известен интервал Δ_i , в котором находится экстремум функции.

Делим его точками y_1^i, y_2^i в пропорции золотого сечения. Если $y_2^i > y_1^i$, отбрасываем x_2^i , обозначаем $x_2^{i+1} = y_2^i$, делим отрезок Δ_{i+1} в пропорции золотого сечения и т. д. Для уменьшений интервала неопределенности в 100 раз требуется 11 вычислений, в 10 000 раз – 21 вычисление. Для сравнения отметим, что **метод половинного деления** (дихотомии) приводит к соответствующему сужению интервала за 14 и 28 вычислений функции.

Преимущество метода золотого сечения заключается в том, что он одинаково хорошо работает для гладких и негладких функций, как на рис. 4.5. Обнаружено, что в случае гладких функций с помощью аппроксимации полиномами удастся несколько быстрее определить экстремум при той же точности, что и методом золотого сечения.

Если оптимизируемая функция определена и унимодальна на всей числовой оси, нет необходимости заботиться о выборе начального интервала неопределенности. Например, в **методе Девиса, Свенна и Кэмпи** (сокращенно ДСК), начиная с некоторой точки, делаются возрастающие шаги до тех пор, пока не будет пройден экстремум, а затем производится квадратичная интерполяция на основании информации о функции в последних трех точках и определяется экстремум интерполяционного полинома. В **алгоритме Пауэлла** квадратичный интерполяционный полином проводится через три произвольные точки, находится приближенно экстремум, отбрасывается одна из четырех точек и процедура повторяется до достижения сходимости. Наиболее эффективной оказывается комбинация описанных алгоритмов, или так называемый метод **ДСК – Пауэлла**. В соответствии с ним сначала по алгоритму ДСК ищется интервал, в котором находится экстремум, выбираются три точки и через них проводится парабола. Приближенное значение в точке экстремума вычисляется, как и в методе Пауэлла:

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2)f(x_1) + (x_3^2 - x_1^2)f(x_2) + (x_1^2 - x_2^2)f(x_3)}{(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3)}.$$

Если значения функции в точке \hat{x} и оптимальное из значений $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ различаются менее, чем на заданную точность, заканчивают вычисления, иначе отбрасывают худшую из точек x_1 , x_2 , x_3 , \hat{x} и проводят новую параболу. Для функций, достаточно близких к квадратичным, эффективность метода ДСК – Пауэлла очень высока: как правило, решение с точностью $10^{-5} \dots 10^{-6}$ достигается за 6 – 8 вычислений целевой функции.

Пауэллом предложен также **метод кубической интерполяции** для нахождения экстремума функции одной переменной.

4.2.3. Методы оптимизации без ограничений

Рассмотрим задачу отыскания максимума функции многих переменных без ограничений. Найти максимум $f(x)$, $x \in E^n$. Одними из наиболее известных являются **градиентные методы** решения этой задачи. Они основаны на том, что продвижение к экстремуму целевой функции в пространстве E^n осуществляется по правилу

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k. \quad (4.9)$$

Здесь Δx_k – вектор перехода из точки x_k в точку x_{k+1} , $\Delta x_k = \lambda_k s_k$, где s_k – единичный вектор в направлении Δx_k ; λ_k – скаляр.

Вектор s_k задает очередное направление поиска, а λ_k – длину шага в этом направлении. Очевидно, λ_k следует выбирать таким образом, чтобы как можно ближе продвинуться к экстремуму. Используются различные способы выбора направления поиска. Простейший из них заключается в том, что из точки x_k производится движение в направлении наибольшего увеличения $f(x_k)$,

т. е. в направлении градиента функции в данной точке. Согласно этому методу, называемому *методом наискорейшего спуска*,

$$s_k = \frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}, \quad \text{где } \|\nabla f(x_k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_i} \right)^2},$$

а формула перехода из x_k в x_{k+1} имеет вид

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}. \quad (4.10)$$

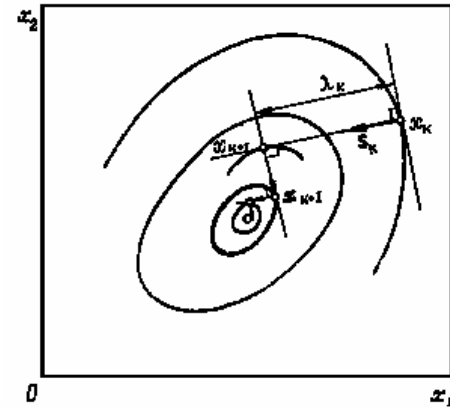


Рис 4.6. Геометрическая интерпретация поиска экстремума функции методом наискорейшего спуска

Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода наискорейшего спуска в случае двух переменных (рис. 4.6). Переход по формуле (4.10) не позволяет прийти в точку экстремума за один шаг; процедуру следует повторять многократно до тех пор, пока не будет достигнут максимум, т.е. выполнится условие $\|\nabla f\| = 0$. Вычисление частных производных функции в точках x_k в общем случае осуществляется численно. Шаг поиска можно выбирать постоянным, но лучше определять его из условия $\max_{\lambda_k} f(x_k + \lambda_k s_k)$ с

использованием рассмотренных ранее методов одномерного поиска. Направление градиента, как известно, всегда ортогонально линии уровня: при оптимальном выборе шага еще ортогональны и соседние направления поиска.

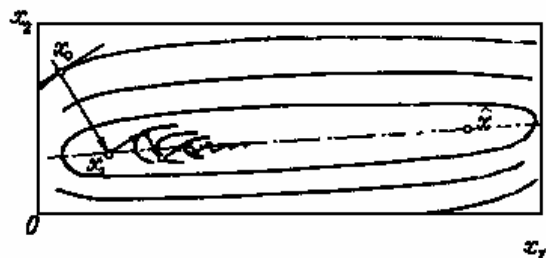


Рис 4.7. Траектория метода наискорейшего спуска при оптимизации овражной функции

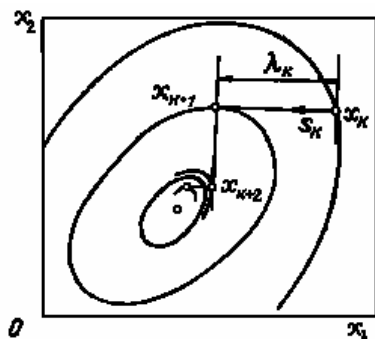


Рис.4.8. Геометрическая интерпретация поиска экстремума функции методом покоординатного спуска

Теория показывает, а практика расчетов подтверждает, что метод наискорейшего спуска малоэффективен в тех случаях, когда линии уровня целевой функции сильно вытянуты, т. е. имеют место глубокие овраги при поиске минимума или хребты при поиске максимума (рис. 4.7). Из рисунка следует, что направление наискорейшего спуска оказывается почти ортогональным наилучшему

направлению поиска, как следствие этого оптимальный шаг все время уменьшается и алгоритм «застрянет», не дойдя до экстремума. Выходом из этой ситуации может быть такое масштабирование переменных, при котором линии уровня получили бы вид, близкий к окружностям.

С целью сокращения количества вычислений целевой функции, связанных с численным определением частных производных, иногда применяют *метод покоординатного спуска*, который называют еще релаксационным, или методом Гаусса–Зайделя (рис.4.8). Пусть e_i – единичный орт оси x_i , а $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ – начальная точка поиска. Одна итерация метода покоординатного спуска заключается в осуществлении n шагов: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k e_k$, $k = 1, \dots, n$. Шаг, как и в методе наискорейшего спуска, определяется из условия $\max_{\lambda_k} f(x_k + \lambda_k e_k)$. Методу Гаусса – Зайделя присущ тот же недостаток, что и методу наискорейшего спуска, – плохая сходимость при наличии оврагов.

Один из способов преодоления вычислительных трудностей, связанных с овражной структурой целевой функции, предполагает использование информации не только о ее первой производной, но и более высокого порядка, содержащейся во вторых частных производных. Произвольная функция может быть представлена в виде квадратичной разложением ее в ряд Тейлора в окрестности точки x :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \nabla^T f(x) \Delta x + \frac{1}{2} (\Delta x)^T H(x) \Delta x.$$

Минимум в направлении Δx получается дифференцированием по каждой из компонент вектора Δx , что дает

$$\Delta x = -H^{-1}(x) \nabla f(x). \quad (4.11)$$

Если подставить (4.11) в (4.9), получим выражение для точки минимума квадратичной функции

$$x = x - H^{-1}(x) \nabla f(x). \quad (4.12)$$

В случае, когда целевая функция с самого начала является квадратичной, оптимальная точка находится за один шаг, если же

функция произвольная, это сделать не удастся и для достижения минимума следует многократно пользоваться формулой (4.12):

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k). \quad (4.13)$$

Еще лучше по аналогии с градиентами вместо (4.13) использовать соотношение

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k s_k = x_k + \lambda_k \frac{H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)}{\|H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)\|}, \quad (4.14)$$

а шаг λ_k выбирать из условия минимума $\min_{\lambda_k} f(x_k + \lambda_k s_k)$.

Уравнения (4.13) или (4.14) применяются итеративно до достижения критерия окончания процесса вычислений, называемого *методом Ньютона*. Трудности использования алгоритма Ньютона связаны, во-первых, с обращением матрицы Гессе, а во-вторых, с вычислением вторых частных производных, что ограничивает его практическое использование [16].

Методы сопряженных направлений лишены недостатков градиентных методов и по скорости сходимости приближаются к методу Ньютона. В то же время они являются методами первого порядка, как и градиентные. Положительно определенная квадратичная форма n переменных минимизируется методами сопряженных градиентов не более чем за n шагов. Методы сопряженных градиентов пригодны и для минимизации неквадратичных функций, только при этом они становятся итерационными.

Два вектора x, y в пространстве E^n называются сопряженными относительно матрицы H , если $x^T H y = 0$. Рассмотрим квадратичную функцию n переменных

$$f(x) = a + x^T b + \frac{1}{2} x^T H x \quad (4.15)$$

с положительно определенной матрицей H . Применим для минимизации функции $f(x)$ итерационный процесс $x_{k+1} = x_k + \lambda_k s_k$. Направление спуска на k -м шаге s_k является одним из векторов системы сопряженных векторов s_0, s_1, \dots, s_{n-1} . Если выбрать λ_k

из условия минимума $f(x_k + \lambda_k s_k)$, т. е. $\frac{\partial f(x_k + \lambda_k s_k)}{\partial \lambda_k}$, то,

дифференцируя по шагу (4.15), получаем

$$\lambda_k = -\frac{\nabla^T f(x) s_k}{s_k^T H s_k}. \quad (4.16)$$

Применяя формулы (4.15), (4.16), на n -м шаге итерационного процесса находим

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k s_k = x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\nabla^T f(x) s_k}{s_k^T H s_k}. \quad (4.17)$$

Можно сказать, что точка x_n является точным минимумом функции $f(x)$, т. е. $x_n = \hat{x} = -H^{-1}b$, а значит, процесс (4.17) с выбором λ_k по (4.16) действительно дает возможность найти минимум квадратичной функции за n шагов.

Существуют различные способы построения сопряженных направлений. В частности, Флетчером и Ривсом предложен метод, названный *методом сопряженных градиентов*, согласно которому последующее направление поиска является линейной комбинацией направления наискорейшего спуска и предыдущего направления, т.е.

$$s_k = -\nabla f(x_k) + \beta_{k-1} s_{k-1}. \quad (4.18)$$

В качестве начального направления поиска выбирается $s_0 = -\nabla f(x_0)$. Весовые коэффициенты β_{k-1} определяются таким образом, чтобы направления s_0, s_1, \dots, s_{n-1} были сопряженными. Можно показать, что

$$\beta_{k-1} = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}.$$

Поскольку направления поиска являются сопряженными, для квадратичной функции метод Флетчера – Ривса приводит к решению не более чем за n шагов. В случае произвольной функции после каждых n шагов рекомендуется «обновлять» направление

поиска, полагая $s_n = -\nabla f(x_n)$, и повторять процесс (4.17) с заменой x_0 на x_n . Подходы к отысканию экстремума функций с применением ее производных рассмотренными методами не исчерпываются. Их описание можно найти в специальной литературе [16, 50].

Некоторые методы вовсе не используют производных функций, а направление оптимизации в них определяется только на основании последовательных вычислений целевой функции. В тех случаях, когда затруднительно определение производных целевой функции, **алгоритмы поиска**, описанные в разделе 4.3, могут оказаться более предпочтительными. В одномерном случае аналогом метода поиска является метод золотого сечения, а метода, использующего производные, – метод ДСК – Пауэлла.

Как видим, существует множество методов отыскания безусловного экстремума функции многих переменных и их список далеко не ограничивается описанными выше. Такое многообразие свидетельствует о том, что не существует абсолютно лучшего алгоритма. При выборе метода следует учитывать специфику решаемой задачи и обращаться к более сложным процедурам только в том случае, когда более простые оказываются бессильными. Эффективность того или иного метода при решении оптимизационной задачи принято оценивать по количеству вычисления целевой функции, необходимых для достижения заданной точности. Алгоритмы оптимизации проходят предварительное опробование на специально составленных *тестовых задачах*, имеющих сложную форму поверхностей уровня, в частности изогнутые овраги. Приведем лишь две наиболее известные тестовые задачи:

функция Розенброка

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$

начальный вектор $\{-1, 2, 1\}$, решение $\hat{x} = \{1, 1\}$, $f(\hat{x}) = 0$;

функция Вуда

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^3 + 10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1),$$

начальный вектор $\{-3;-1;-3;-1\}$, решение $\hat{x} = \{1;1;1;1\}$, $f(\hat{x}) = 0$. По нашим данным, методом сопряженных градиентов в сочетании с одномерным поиском ДСК – Пауэлла экстремум функции Розенброка находится за 28 итераций, или 282 вычисления целевой функции, причем $f(\hat{x}) \approx 10^{-7}$, а экстремум функции Вуда – за 29 итераций, или 438 вычислений целевой функции при той же точности.

4.2.4 Методы оптимизации при наличии ограничений

Кроме описанного ранее метода множителей Лагранжа для отыскания экстремума функций при наличии ограничений разработан ряд численных методов. Первый подход к построению алгоритмов условной оптимизации заключается в монотонном движении к оптимуму целевой функции и стремлении при этом к точному или приближенному удовлетворению ограничений. Методы этого типа весьма многочисленны, однако сложность, недостаточная универсальность и большой объем вычислительной работы ограничивают их применение в практических расчетах.

Более изящны, просты в реализации и эффективны методы, основанные на сведении задач с ограничениями к решению последовательности задач безусловной оптимизации – так называемые **методы штрафных функций**. Существует несколько вариантов этих методов. Начнем их рассмотрение с *метода внутренней точки* для задачи с ограничениями-неравенствами:

найти максимум $f(x)$, $x \in E^n$

при ограничениях $g_j(x) \geq 0$, $j = 1, \dots, p$. (4.19)

Для определения условного экстремума строится так называемая присоединенная целевая функция

$$I_k^*(x, A_k) = f(x) - A_k \sum_{j=1}^p \frac{1}{g_j(x)}, \quad (4.20)$$

где A_k – число, называемое штрафным коэффициентом;

$\sum_{j=1}^p \frac{1}{g_j(x)}$ – штрафная функция. Алгоритм решения задачи (4.19)

заключается в следующем [50]: выбирается допустимая точка x_0 , в которой все $g_j(x_0) \geq 0$, и монотонно убывающая последовательность положительных штрафов A_k ; для каждого $k = 1, 2, \dots$, начиная с точки \hat{x}_{k-1} , решается задача безусловной оптимизации функции (4.20).

Если для каждого k возможно найти максимум I_k^* по x , последовательность $\{\hat{x}_k\}$ сходится к решению задачи (4.19).

Организация численного поиска максимума функции (4.20) должна быть такой, чтобы точка x не покидала допустимой области. Этому недостатка лишен *метод внешних штрафных функций*, который для задачи вида (4.19) предполагает построение присоединенной целевой функции

$$I_k^*(x, A_k) = f(x) - A_k \sum_{j=1}^p (g_j^+(x))^2, \quad (4.21)$$

где $g_j^+(x) = \min\{0, g_j(x)\}$. Таким образом, внутри допустимой области, где $g_j(x) \geq 0$, $g_j^+(x) = 0$, а вне ее $g_j^+(x) = g_j(x)$.

В отличие от (4.20) функция (4.21) определена при всех $x \in E^n$.

Алгоритм решения задачи состоит в следующем [50]: берется произвольная точка x_0 и монотонно возрастающая последовательность чисел $A_k \rightarrow \infty$; для $k = 1, 2, \dots$, начиная с \hat{x}_{k-1} , решается задача безусловной оптимизации функции (4.21), в результате чего определяется новое приближение \hat{x}_k .

Можно показать [132], что последовательность точек \hat{x}_k сходится к решению задачи (4.21), только в отличие от метода внутренней точки движение к экстремуму происходит вне допустимого множества, откуда и берется название метода внешних штрафных функций. Этот метод применим также и к общей задаче нелинейного программирования (4.1), для чего используется присоединенная целевая функция

$$I_k^*(x, A_k) = f(x) - A_k \left[\sum_{j=1}^m h_j^2(x) + \sum_{j=1}^p (g_j^+(x))^2 \right]. \quad (4.22)$$

Алгоритм решения остается таким же, как и для задачи (4.21).

Решение задач нелинейного программирования с ограничениями методами штрафных функций усложняется тем, что по мере увеличения штрафного коэффициента функция (4.22) приобретает все более выраженную овражную структуру. Как было показано ранее, не все методы безусловной оптимизации могут справиться с решением подобных задач, в связи с чем выбор метода отыскания экстремума присоединенной целевой функции имеет принципиальное значение. Большую роль играет также стратегия изменения штрафного коэффициента, так как если выбрать его сразу большим, хорошо удовлетворяются ограничения задачи, но не улучшается целевая функция. Напротив, при слишком малых значениях A_k происходит движение в сторону улучшения целевой функции, но практически не принимаются во внимание ограничения, что может привести к выходу в такие области E^n , где целевая функция или ограничения не определены.

Например, если в целевой функции или ограничениях присутствуют члены вида x^a , недопустимо попадание в зону с $x \leq 0$. Избавиться от *зональной неопределенности*, приводящей в расчетах на ЭВМ к аварийным ситуациям, иногда можно введением подходящей замены переменных. В частности, для удовлетворения условия $x > 0$ подходит замена $x = e^z$, где уже $z \in E^1$. Если подобный прием невозможен, следует тщательно подбирать такие константы методов безусловного поиска, как длина шага в направлении спуска, изменение этого шага, чтобы в процессе одномерного поиска вектор переменных не покидал области, где целевая функция и ограничения задачи определены.

В заключение остановимся на возможностях использования методов нелинейной оптимизации в целях решения систем нелинейных уравнений.

Пусть в задаче (4.1) отсутствуют ограничения в виде неравенств, а число переменных равно числу ограничений в виде ра-

венств, т.е. фактически стоит задача решения системы m уравнений с m неизвестными. Составим функцию

$$I^* = -\sum_{j=1}^m h_j^2(x) \quad (4.23)$$

и найдем ее максимум. Если существует решение системы уравнений $h_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, m$, то, очевидно, одновременно с максимумом I^* находим корень системы уравнений. В частности, если функции $h_j(x)$ линейны, функция (4.23) получается квадратичной и может быть эффективно решена методом Ньютона или сопряженных градиентов. Замена задачи решения системы линейных уравнений задачей на экстремум оправдана в тех случаях, когда матрица системы плохо обусловлена (например, в задаче аппроксимации по методу наименьших квадратов) и не поддается решению обычными методами, в частности, методом исключения.

Величины $h_j(x)$ в задаче (4.23) называют *невязками*, а решение системы нелинейных уравнений заменяется *минимизацией суммы квадратов невязок*.

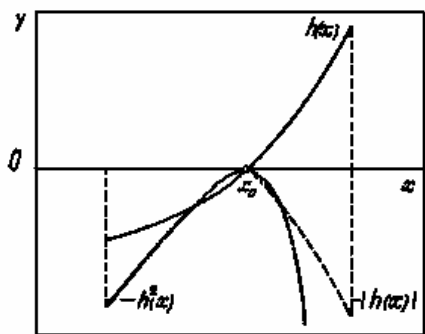


Рис.4.9. Решение уравнения с одной переменной путем минимизации невязки

Приведем иллюстрацию этого способа решения уравнений на примере случая одной переменной. Согласно рис. 4.9, если урав-

нение $h(x) = 0$ имеет один корень x_0 , он совпадает с точкой глобального максимума функции $-h^2(x)$. В практических расчетах при решении уравнения с одним неизвестным удобно производить поиск методом золотого сечения в интервале, где находится единственный корень. Вместо функции $-h^2(x)$ можно также брать $-|h(x)|$.

4.3. Методы прямого поиска

Для ряда задач оптимизации целевая функция может определяться путем решения сложной краевой задачи. В этом случае применение градиентных методов часто оказывается неудобным по нескольким причинам. Во-первых, решение систем разностных уравнений уже само по себе обычно представляет достаточно трудоемкий процесс, не говоря уже о вычислении частных производных от целевой функции, которое может быть выполнено только численно и, по-видимому, с достаточно большими погрешностями. Во-вторых, сами численные решения разностных уравнений неизбежно содержат погрешности, причем далеко не всегда систематические, что может резко ухудшить сходимость градиентных методов. Поэтому, в ряде случаев для решения задач оптимизации целесообразно применять методы прямого поиска оптимального решения. Некоторые из этих методов, опираясь на эвристические представления о возможном рельефе целевой функции, определяют детерминистическую стратегию поиска локального экстремума. Другие, так называемые стохастические методы, такие как генетический алгоритм, используют аналогию с эволюционными процессами для нахождения глобального экстремума целевой функции. В целом, методы поиска, не всегда строго математически обоснованные, оказываются, тем не менее, незаменимыми при решении ряда практических задач оптимизации.

4.3.1. Метод прямого поиска Хука–Дживса

Метод Хука–Дживса [133] является классическим примером методов поиска. Этот метод можно рассматривать как вариант метода покоординатного спуска [134], который включает алгоритм

ускорения поиска экстремума, основанный на анализе информации, полученной на предыдущих удачных итерациях. Алгоритм метода схематически показан на рис. 4.10 и 4.11. Из начальной точки \bar{x}_k итерации k выполняются пробные шаги x_k^i во всех возможных координатных направлениях. Шаг считается удачным, если в его результате значение целевой функции улучшилось (уменьшилось, если ищется минимум или увеличилось, если ищется максимум) по сравнению со значением в начальной точке. Удачные шаги на рис. 4.10 показаны черными кружочками и сплошными линиями. Если в результате пробного шага значение целевой функции не улучшилось, такой шаг называется неудачным

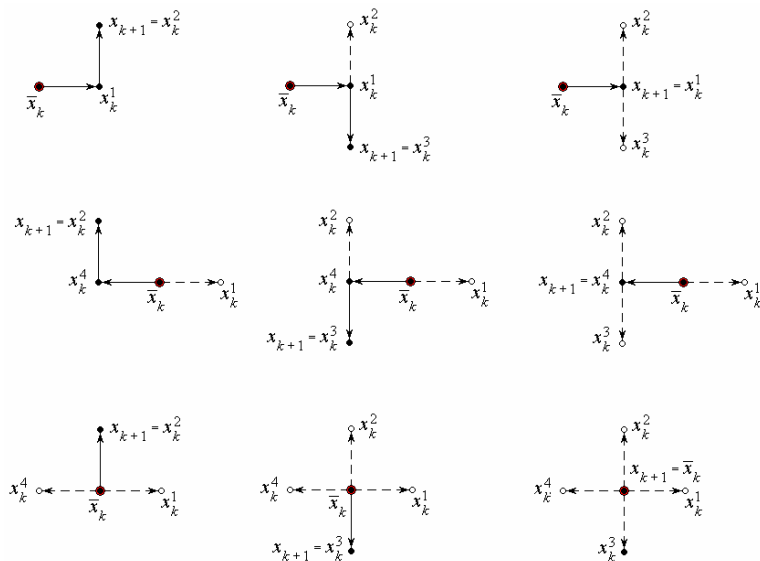


Рис. 4.10. Последовательность покоординатного спуска на основном этапе методе Хука–Дживса для двухмерной задачи оптимизации

и движение на данной итерации в этом направлении отвергается. Неудачные шаги обозначены на рис. 4.10 белыми кружочками и штриховыми линиями. Очевидно, что шаг, приведший в точку \bar{x}_k , был удачным. Итерация включает в себя хотя бы один, но не более

двух разнонаправленных шагов по каждому из координатных направлений. Если в результате итерации k удалось улучшить значение целевой функции, то итерация считается выполненной успешно и начальной точкой x_{k+1} итерации $k+1$ становится точка x_k^i , в которой указанное улучшение достигнуто. Если все возможные шаги не дали улучшения целевой функции (последний случай на рис. 4.10), то итерация считается выполненной неудачно, значению x_{k+1} присваивается значение \bar{x}_k , и, в этом случае, осуществляется уменьшение шага метода. Рассмотренный алгоритм представляет собой вариант метода покоординатного спуска и включен в метод Хука–Дживса в качестве второго окончательного этапа. На предварительном этапе метода Хука–Дживса используется информация о последней итерации для дополнительной экстраполяции (рис. 4.11): $\bar{x}_k = x_k + (x_k - x_m)$, где $m = \max(0, k-1)$.

Если последняя итерация удачна, то, очевидно, $x_k \neq x_{k-1}$ и экстраполяционное направление $x_k - x_{k-1} = x_k - x_m$ однозначно определено. В этом случае точка \bar{x}_k временно принимается, даже если значение целевой функции в ней хуже, чем в точке x_k , и выполняется второй этап – покоординатный спуск из точки \bar{x}_k . Если в результате этого поиска удастся улучшить значение целевой функции (очевидно, относительно исходной точки x_k), то экстраполяционное значение \bar{x}_k считается принятым, а итерация успешно завершается.

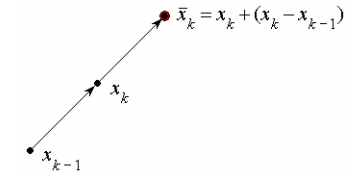


Рис. 4.11. Экстраполяционный предварительный этап метода Хука–Дживса

Если покоординатный спуск из точки \bar{x}_k не привел к успеху или последняя итерация неудачна, или $k = 0$, то $\bar{x}_k = x_k$ и алгоритм сводится к покоординатному спуску из точки x_k .

Так как сходимость метода Хука–Дживса доказана [135], то можно было бы надеяться на эффективность его использования при

решении сложных оптимизационных задач. Однако этот метод требует достаточно большого количества вычислений целевой функции на одной итерации (пропорционально размерности задачи), поэтому его применение в случаях, когда нахождение целевой функции весьма трудоемко, будет, по-видимому, ограничено. Также к недостаткам метода можно отнести не вполне удовлетворительное поведение алгоритма поиска для оптимизируемых функций со сложным овражистым рельефом.

4.3.2. Метод Нелдера–Мида

Для метода Нелдера–Мида [136], вероятно наиболее популярного из методов поиска, алгоритм построен таким образом, что на каждой итерации не осуществляются пробные шаги по каждому из n линейно независимых направлений, а выбирается лишь одно направление, которое и является направлением спуска. Преимущество такого подхода очевидны – количество вычислений целевой функции на одной итерации метода перестает быть пропорционально размерности оптимизационной задачи. Однако, главный недостаток метода Нелдера–Мида – отсутствие сходимости при большом количестве оптимизируемых параметров, – по-видимому, как раз и является следствием того, что направление спуска, выбираемое без перебора всех возможных направлений, может не соответствовать направлению градиента целевой функции.

Кратко алгоритм может быть описан следующим образом. На каждой итерации, в том числе и на начальной, для организации процесса поиска используется набор пробных точек, в каждой из которых вычислено значение целевой функции. Пробные точки выбираются таким образом, чтобы они образовывали в n -мерном пространстве многогранник с $n+1$ вершиной, т.е. в случае двух переменных – треугольник, трех переменных – тетраэдр и т.д. (рис. 4.12). Вершина (точка), в которой значение целевой функции наихудшее, проецируется через центр тяжести (центроид) *оставшихся* вершин. Если в результате такого проецирования удастся улучшить целевую функцию, то новая точка включается в многогранник, а точка с наихудшим значением целевой функции исключается из него. Если же улучшения значения целевой функции добиться не удастся, тогда осуществляется замена текущего

многогранника ему подобным, но меньшего размера (аналог дробления шага).

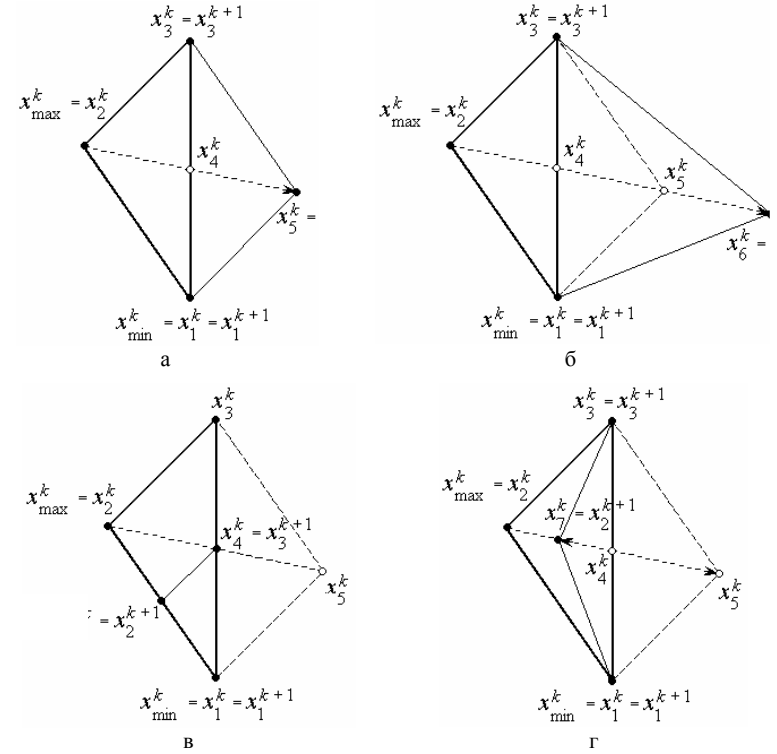


Рис.4.12. Последовательность пробных шагов в методе Нелдера–Мида для двухмерной задачи оптимизации, $n=2$

Подробней и более строго алгоритм метода Нелдера–Мида для отыскания минимума функции n переменных может быть представлен следующим образом [16].

Пусть $\mathbf{x}^k = [\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k, \mathbf{x}_3^k, \dots, \mathbf{x}_i^k, \dots, \mathbf{x}_{n+1}^k]^T$ – многогранник на итерации k , а $f_i^k = f(\mathbf{x}_i^k)$ является значением целевой функции в i -ой вершине этого многогранника, определенной в n -мерном пространстве координатами $\mathbf{x}_i^k = [x_{i1}^k, x_{i2}^k, x_{i3}^k, \dots, x_{ij}^k, \dots, x_{in}^k]$, где ин-

декс j обозначает координатное направление. Тогда максимальное и минимальное значения целевой функции на итерации k можно записать как

$$f_{max}^k = f(\mathbf{x}_{max}^k) = \max\{f(\mathbf{x}_1^k), \dots, f(\mathbf{x}_i^k), \dots, f(\mathbf{x}_{n+1}^k)\}$$

и

$$f_{min}^k = f(\mathbf{x}_{min}^k) = \min\{f(\mathbf{x}_1^k), \dots, f(\mathbf{x}_i^k), \dots, f(\mathbf{x}_{n+1}^k)\}.$$

Координаты центра тяжести всех вершин многогранника исключая ту, в которой значение целевой функции максимально, могут быть представлены как

$$\mathbf{x}_{n+2}^k = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{x}_i^k \right) - \mathbf{x}_{max}^k \right].$$

Тогда первый этап метода, так называемое *отражение*, заключается в осуществлении пробного шага – проецирования \mathbf{x}_{max}^k через центр тяжести \mathbf{x}_{n+2}^k (рис. 4.12,а):

$$\mathbf{x}_{n+3}^k = \mathbf{x}_{n+2}^k + \alpha(\mathbf{x}_{n+2}^k - \mathbf{x}_{max}^k),$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент отражения, обычно $\alpha = 1$.

На втором этапе метода анализируется значение целевой функции в точке \mathbf{x}_{n+3}^k и в зависимости от ее величины выполняется одна из следующих операций.

Если $f(\mathbf{x}_{n+3}^k) \leq f(\mathbf{x}_{min}^k)$, то реализуется *растяжение* – вектор $(\mathbf{x}_{n+3}^k - \mathbf{x}_{n+2}^k)$ растягивается в соответствии с соотношением (рис. 4.12,б)

$$\mathbf{x}_{n+4}^k = \mathbf{x}_{n+2}^k + \gamma(\mathbf{x}_{n+3}^k - \mathbf{x}_{n+2}^k),$$

где $\gamma > 1$ – коэффициент растяжения, обычно $\gamma = 2$. Если наблюдается дальнейшее улучшение целевой функции $f(\mathbf{x}_{n+4}^k) < f(\mathbf{x}_{n+3}^k)$, то точка \mathbf{x}_{max}^k заменяется точкой \mathbf{x}_{n+4}^k , в противном случае точкой \mathbf{x}_{n+3}^k .

Если $f(\mathbf{x}_{n+3}^k) > f(\mathbf{x}_{max}^k)$, то выполняется операция *редукции* многогранника, то есть все векторы $(\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}_{min}^k)$ уменьшаются вдвое (рис. 4.12,в):

$$\mathbf{x}_i^k = \mathbf{x}_i^k + 0,5(\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}_{min}^k), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Если $f(\mathbf{x}_{n+3}^k) > f(\mathbf{x}_i^k)$ для всех $\mathbf{x}_i^k \neq \mathbf{x}_{max}^k$, то выполняется *сжатие* – вектор $(\mathbf{x}_{max}^k - \mathbf{x}_{n+2}^k)$ сжимается в соответствии с формулой (рис. 4.12,г)

$$\mathbf{x}_{n+5}^k = \mathbf{x}_{n+2}^k + \beta(\mathbf{x}_{max}^k - \mathbf{x}_{n+2}^k),$$

где $0 < \beta < 1$ – коэффициент сжатия, обычно $\beta = 0,5$. В этом случае точка \mathbf{x}_{max}^k заменяется точкой \mathbf{x}_{n+5}^k .

Если значение целевой функции $f(\mathbf{x}_{n+3}^k)$ таково что ни растяжение, ни сжатие, ни редукция не реализуются, то точка \mathbf{x}_{max}^k заменяется точкой \mathbf{x}_{n+3}^k (рис. 4.12,а).

После окончания второго этапа итерация завершается, осуществляется переход $k = k + 1$ и выполняется первый этап следующей $k + 1$ итерации.

Критерий сходимости заключается в проверке условия

$$\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [f(\mathbf{x}_i^k) - f(\mathbf{x}_{n+2}^k)]^2} \leq \varepsilon,$$

где ε – произвольное малое число. Отметим, что, так как значение целевой функции в центре тяжести $f(\mathbf{x}_{n+2}^k)$ используется только для проверки сходимости и не влияет на процесс трансформации многогранника, то это значение для сокращения количества вычислений целевой функции на итерации может быть эмулировано, например, следующим образом

$$f(\mathbf{x}_{n+2}^k) = \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} f(\mathbf{x}_i^k) \right) - f(\mathbf{x}_{max}^k) \right].$$

4.4. Псевдослучайный поиск на исходных и формальных макромоделях

Рассмотренные методы отыскания экстремума могут успешно использоваться при решении практических задач оптимального проектирования, однако всегда следует помнить о том, что существуют ситуации, когда их применение затруднительно или приводит к неверным результатам. Это связано с такими особенностями в реальных задачах проектирования, как многокритерность, многоэкстремальность, высокая размерность, трудновычислимость и недифференцируемость целевой функции или ограничений, многосвязность области допустимых значений, зональная неопределенность и т.д., которые могут присутствовать в различных комбинациях.

В сложных случаях не следует стремиться к полной автоматизации процесса поиска оптимума, рациональнее организовать диалог проектировщика с вычислительной машиной. Соединение опыта и интуиции конструктора со счетными способностями цифровой ЭВМ в ряде случаев позволяет существенно ускорить решение задачи. Уже созданы диалоговые системы оптимизации с набором процедур поиска экстремума, организованные таким образом, чтобы пользователь имел возможность вмешиваться в процесс решения: изменять метод оптимизации, начальное приближение, константы поиска и т. п. [50].

Многоэкстремальные задачи оптимизации допустимо решать методами локального поиска, задавая случайным образом начальные точки. Вообще говоря, наиболее корректным способом отыскания экстремума функции произвольного вида является прямой перебор ее значений. В одномерном случае для этого строится равномерная сетка в интервале изменения аргумента, а в многомерном - сетки по каждой из переменных и перебираются значения функции в узлах. Понятно, насколько трудоемок этот процесс, если при n переменных размерность сетки равна N , т.е. требуется вычислить и сравнить друг с другом N^n значений целевой функции. Поэтому этот метод пригоден только для задач небольшой размерности.

Меньших затрат вычислительной работы требует случайный поиск, который также не нуждается ни в каких предположениях о

целевой функции. Возможны различные варианты случайного поиска. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) предполагает систематическое вычисление целевой функции в случайной точке допустимой области с последующим выбором лучшей из них. Возможны повторяющийся поиск с выбором случайного направления спуска и шага, зависящего от того, насколько удачными были предыдущие шаги, случайный поиск со случайным направлением и постоянным радиусом поиска и др. [16].

В последние годы популярен метод поиска, основанный на так называемых ЛП_τ-последовательностях, которые являются наиболее равномерными из всех известных равномерно распределенных последовательностей. Этот метод, как и метод прямого перебора, основывается на просмотре многомерных областей, однако оказывается, что при использовании ЛП-поиска требуется значительно меньше пробных точек, чем в случае применения прямоугольных сеток. Метод пригоден для решения задач с несколькими десятками параметров при минимальных требованиях к гладкости целевой функции и ограничений. Более того, он годится для приближенного построения паретовских, поверхностей в задачах со многими критериями [137].

Пояснить, почему прямоугольные сетки в пространстве переменных не являются лучшими, можно на простом примере. Сравним при $n=2$, $N=4$ равномерную прямоугольную сетку и улучшенную, построенную с использованием ЛП_τ-последовательности для функции, не зависящей от одной из переменных, видим, что первая из них несет информацию только о 4 значениях функции, а вторая - уже о 16, что дает значительно лучшее представление о характере ее изменения; (рис. 4.13). С ростом размерности n разница в информации о функции, получаемой на прямоугольной и улучшенной сетках, может еще больше возрасти.

Отыскание экстремума трудновычислимых, но достаточно гладких функций целесообразно осуществлять с использованием аппарата теории планирования эксперимента. Исходная функция заменяется ее квадратичной моделью, получаемой путем проведения численного; эксперимента - вычисления значений функции в определенным образом выбранных точках. Если оптимизационная задача имеет сложные ограничения, они тоже заменяются

квадратичными моделями и оптимизация проводится на аппроксимированных целевой функции и ограничениях одним из методов нелинейного программирования. При таком подходе наблюдается существенный выигрыш в машинном времени, тем больший, чем существеннее разница во времени расчета исходной целевой функции и ее квадратичной модели. Напрашивается аналогия между методами Ньютона и основанным на теории планирования эксперимента. Если первый для квадратичной аппроксимации, использует локальную информацию о целевой функции в текущей точке поиска, то второй - усредненную по всей области изменения переменных.

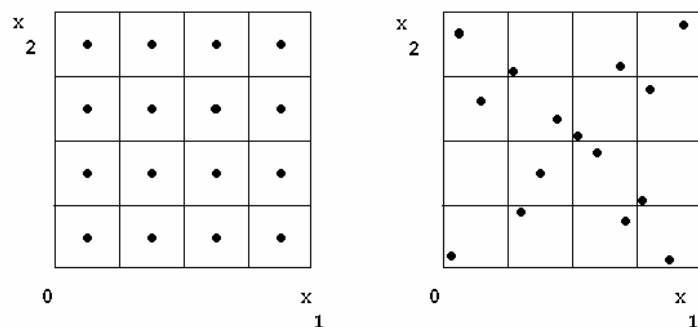


Рис. 4.13. Равномерная и полученная с использованием ЛПт –последовательности сетки в пространстве двух переменных

Относительно высокая трудоемкость тепловых расчетов ступени даже в одномерной постановке, большое количество параметров, влияющих на ее экономичность, затрудняют поиск оптимального варианта. Упростить и ускорить целенаправленное численное исследование экономичности турбинной ступени можно путем анализа ее формальных макромоделей, получаемых на основе исходной математической модели с помощью планирования численного эксперимента. Макромоделирование широко используется при блочно-иерархическом подходе к процессу проектирования сложных технических систем для передачи информации об объектах более низкого иерархического уровня на более высокий.

В частности, мы использовали макромоделю расчета потерь трения в решетках (низший уровень проектирования) для оценки, коэффициентов скорости при тепловом расчете турбинных ступеней (более высокий иерархический уровень). В свою очередь макромоделю параметров ступени и проточной части в целом можно использовать в задачах расчета и оптимизации подсистем еще более высокого уровня, например при проектировании тепловой схемы турбоустановки.

Применение достаточно точных формальных макромоделей турбинной ступени дает возможность анализировать и оптимизировать характеристики последней, основываясь на математической модели, значительно более, простой, чем исходная, что в десятки и сотни раз снижает трудоемкость расчетов.

Для построения факторной макромоделю воспользуемся планами экстремального эксперимента Бокса и Бенкена [7], которые позволяют получить функцию отклика в виде полного квадратичного полинома. Возьмем, к примеру, в качестве исходной математическую модель решения обратной задачи с заданной степенью реактивности и будем строить зависимости выходных параметров от внешних и внутренних: $Y=Y(B, X)$. Внешними в задаче приняты параметры P_0^* , i_0^* , G , ω , P_2 и т.д.; выходными - КПД, составляющие потерь, мощность, наконец, просто любые из фазовых переменных (скорости, углы потока и т. п.). В общем случае внутренними параметрами будут любые геометрические размеры проточной части, степень реактивности, скорости и углы потока, количество лопаток в венцах. Некоторые из них могут задаваться заранее и входить в число внешних параметров.

Создание и исследование макромоделю ступени включает в себя ряд этапов:

выбор параметров, по которым производится моделирование, формирование вектора варьируемых параметров Q , назначение диапазонов изменения его компонент; проведение и обработка результатов численного эксперимента с целью получения коэффициентов полинома;

поиск экстремальной точки по компонентам вектора Q . Поскольку моделируется не один выходной параметр, а целый набор, то обработка результатов эксперимента проводится многократно, в соответствии с размерностью вектора Y . С целью умень-

шения размерности вектора варьируемых параметров часть геометрических и газодинамических параметров ступени представляем в безразмерном виде. Один из возможных вариантов формирования вектора варьируемых параметров следующий:

$$\mathbf{Q} = \{P_0^*, S_0^*, \nu_0, c_{0\sigma}, R, (l/b)_c, (l/b)_n, (t/b)_c, (t/b)_n, D_{cp}/l, \delta_c/l_c, \delta_n/l_n\}.$$

Он подходит для макро моделирования ступеней части высокого или среднего давления паровых турбин, где форма проточной части близка к цилиндрической. Если рабочее тело считать совершенным газом, вместо давления и энтропии торможения достаточно включить лишь один параметр λ_0 , характеризующий сжимаемость. При желании набор варьируемых параметров может быть изменен, но только с таким расчетом, чтобы размерность вектора \mathbf{Q} совпадала с допустимой в методике Бокса и Бенкена. Назначение диапазона изменения компонент вектора варьируемых параметров производится в соответствии с имеющимся опытом проектирования турбинных ступеней.

Проведение активного численного эксперимента требует натуральных значений компонент векторов внешних и внутренних параметров, получающихся в соответствии со значениями компонент вектора \mathbf{Q} , которые задаются матрицей планирования эксперимента. Переход к натуральным величинам возможен с заданием угловой скорости вращения, корневого диаметра ступени, разницы высот рабочих и сопловых лопаток. Обработка результатов численного эксперимента с 12 факторами позволяет определить 91 неизвестный коэффициент полинома, по которым очень легко оценить характер и степень влияния того или иного фактора на выходной параметр макро модели.

Поиск экстремума квадратичной функции следует вести в области изменения вектора \mathbf{Q} , т.е. в гиперкубе с гранями, удаленными от начала координат на расстояние ± 1 . Поиск экстремума функции отклика возможен покоординатным спуском, начиная с центральной точки плана, с аналитическим определением оптимального решения вдоль каждой из осей координат.

Для более точного поиска оптимального сочетания варьируемых параметров, возможно, придется составить новую макро-

модель в более узкой окрестности оптимального в первом приближении решения.

ГЛАВА 5. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ТУРБИН

5.1. Постановка задач одномерной и квазидвумерной оптимизации

Задачу оптимизации осевой турбины можно рассматривать как частный случай общей задачи оптимального проектирования технических устройств, рассмотренной в 1-й главе. При проектировании турбоагрегата в целом необходимо учитывать множество факторов: надежность, технологичность, стоимость, экономичность и т. д. В качестве целевой функции эффективности турбоустановки целесообразно принять минимум приведенных расчетных затрат. При этом для крупных базовых турбоагрегатов экономичность при сохранении надежности играет главенствующую роль, так как уменьшение удельного расхода топлива в процессе эксплуатации турбоагрегата быстро окупает повышение его стоимости. Таким образом, в качестве критерия эффективности при проектировании проточной части крупных базовых турбин может быть взят к.п.д.

Рассматривая задачу оптимизации проточной части осевой турбины, будем характеризовать ее различными группами переменных:

а) режимными или проектными параметрами, которые задаются конструктором (расход; параметры на входе и давление на выходе из ступени или группы ступеней; величины, определяющие конфигурацию и размеры проточной части);

б) фазовыми переменными или параметрами состояния, определяемыми из задач расчета проточной части при заданных замыкающих соотношениях (например, давление и энтальпия в зазорах при методе оптимизации, использующем уравнения прямой задачи);

в) управляющими или регулирующими переменными, задание которых определяет постановку задачи (например, углы α_1 и β_2 в случае модели, использующей уравнения прямой задачи).

Тогда задачу оптимизации, например, для ступени, можно представить следующим образом:

$$\text{определить } \max_{\vec{Y}} \eta(\vec{P}, \vec{\Phi}, \vec{Y}) \quad (5.1)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_1(\vec{P}, \vec{\Phi}, \vec{Y}_1) &= 0; \\ \vec{A}_2(\vec{P}, \vec{\Phi}, \vec{Y}_2) &= 0; \\ \vec{A}_3(\vec{P}, \vec{\Phi}, \vec{Y}) &= 0; \\ \vec{\Phi} &\in [\vec{\Phi}_{min}, \vec{\Phi}_{max}] \\ \vec{Y} &\in [\vec{Y}_{min}, \vec{Y}_{max}] \\ \vec{P} &\in \Omega_n, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где \vec{Y} – вектор управляющих параметров;

\vec{P} – вектор режимных или проектных параметров;

$\vec{\Phi}$ – вектор фазовых переменных;

$$\vec{\Phi} = \{\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2\}; \vec{Y} = \{\vec{Y}_1, \vec{Y}_2\}$$

В соответствии с формулой (5.1) необходимо найти такие значения управляющих переменных \vec{Y} , чтобы достигался максимум к.п.д.

Ограничения (5.2) включают в себя:

а) уравнения, описывающие течение рабочего тела в межвенцовом зазоре (\vec{A}_1);

б) уравнения, описывающие течение рабочего тела за рабочим колесом (\vec{A}_2);

в) дополнительные ограничения, связывающие между собой параметры в зазорах (\vec{A}_3) (например, ограничение, накладываемое на величину теплового перепада на ступень);

г) следующие два ограничения накладываются на область изменения фазовых и управляющих переменных. Типичным усло-

вием ограниченности фазовых переменных является, например, условие положительности плотности, а в качестве ограничений на управляющие переменные в случае прямой задачи можно взять

$$\alpha_{1min} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1max}; \quad \beta_{2min} \leq \beta_2 \leq \beta_{2max};$$

д) последнее условие определяет физически реализуемую задачу проектирования (Ω_n – множество имеющих физический смысл ограничений: $G > 0$; $P_0^* > 0$; $T_0^* > 0$; $P_0^* > P_2$; $D_{cp} > 0$; $D_n > 2l$ и т.п.).

Следует заметить, что интересующая нас задача оптимизации параметров проточной части осевой турбины может ставиться с использованием математической модели как прямой, так и обратной постановки. В моделях, использующих уравнения обратных задач, управляющими становятся некоторые параметры из числа фазовых. Целесообразность выбора той или иной модели устанавливается: сложностью формулировки задачи; необходимостью учета различных факторов, влияющих на процесс в ступени; удобством обобщения на все сформулированные задачи оптимизации элементов проточной части; спецификой используемых численных методов; возможностью получения удобных и гибких машинных программ и другими факторами. В рассматриваемой работе задачи оптимизации с учетом вышеизложенных факторов решаются на основе прямой постановки.

Предположим, что удастся для каждого сочетания параметров \vec{Y}_1, \vec{Y}_2 из допустимой области найти путем решения соответствующих систем уравнений фазовые переменные $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$, удовлетворяющие условиям \vec{A}_3 . Тогда поиск наилучшего решения требует многократных вариантов расчетов. Такой подход, издавна используемый в практике турбиностроения, имеет очевидные недостатки, к главным из которых можно отнести: во-первых, отсутствие гарантии, что выбранное из числа рассматриваемых вариантов "оптимальное" решение является самым лучшим; во-вторых, сложные модели требуют большой затраты машинного времени. Поиск оптимального решения может быть модифицирован путем введения направленного перебора вариантов, однако и в этом случае не удастся полностью устранить перечисленные недостатки. Для

нахождения наилучшего решения при минимальных затратах машинного времени необходимо использовать методы оптимизации, составляющие предмет математического программирования, включающего в себя, как частный случай, нелинейное программирование.

Задача оптимального проектирования ступени (5.1), (5.2) является задачей нелинейного программирования. Одним из эффективных методов решения поставленной задачи является метод штрафных функций, позволяющий свести задачу поиска экстремума при наличии ограничений к задаче без ограничений для некоторой вспомогательной "присоединенной" целевой функции. "Присоединенная" целевая функция строится из исходной целевой функции и штрафной добавки, учитывающей ограничения. Выбор того или иного вида штрафной функции зависит от вида ограничений задачи и выбирается в соответствии с рекомендациями. Для нахождения оптимума "присоединенной" целевой функции должны применяться методы безусловного поиска экстремума функций многих переменных.

Алгоритмы нелинейного программирования позволяют не только находить оптимальные параметры ступеней, но и решать традиционные задачи расчета – прямые и обратные, – путём минимизации суммы квадратов невязок уравнений в зазорах. Для всех случаев оптимизации проводилась проверка нахождения глобального экстремума с помощью задания различных начальных приближений.

В целом опыт расчетов показывает, что подход, использующий методы штрафных функций, имеет существенные преимущества перед другими методами, что определило его широкое использование.

Оптимизация проточной части осевой турбины предполагает решение следующих задач:

1. Определение оптимального количества ступеней и распределение теплоперепадов между ступенями с учетом работы на единственном или множестве режимов;
2. Определение оптимальных геометрических и газодинамических параметров вдоль радиуса ступени с учетом пространственного характера течения рабочего тела и протечек через уплотнение проточной части;

3. Создание оптимальных профилей, удовлетворяющих прочностным и технологическим ограничениям.

При решении всех вышеназванных задач осуществлен общий, ранее сформулированный подход.

5.2. Аналитические решения

Весьма важной задачей при проектировании многоступенчатой осевой турбины является определение оптимального количества ступеней в отсеке и распределение теплоперепада между ступенями. Поставленная задача является весьма сложной. Сложность ее, в частности, заключается в том, что оптимальное количество ступеней в отсеке зависит от ряда противоречивых факторов. Последнее особенно остро ставит вопрос об их правильной количественной оценке.

Как правило, заданной величиной является тепловой перепад на отсек, а варьировать следует числом ступеней и окружной скоростью (диаметрами). При этом следует иметь в виду, что уменьшение окружной скорости, а следовательно, и диаметров ступеней, приводит к уменьшению потерь от трения диска, к увеличению высот лопаток (а значит и к снижению доли концевых потерь), уменьшению протечек в проточной части. В то же время это ведет к увеличению оптимального количества ступеней, что вызывает возрастание потерь от трения дополнительного количества дисков и удлинение ротора турбины. Сразу же обостряются вопросы надежности и прочности (критическое число оборотов вала), материалоемкости, удорожания производства турбины и повышения стоимости строительства электростанции.

Особое место в задаче оптимизации количества ступеней занимает правильная оценка влияния формы проточной части, учет меридионального раскрытия ее при оценке потерь в ступенях. Как известно, наиболее актуален этот вопрос для ЦНД мощных паровых турбин. Поэтому целесообразно в задаче определения оптимального количества ступеней иметь возможность фиксации формы проточной части для ЦНД и в то же время определять оптимальное ее очертание в ЦВД и ЦСД.

Следует также учесть, что выбор степени реактивности на среднем радиусе ступеней (с ней связана и величина теплового пе-

репада) должна производиться с учетом обеспечения положительной ее величины у корня.

Как видно из вышеизложенного, проблема выбора оптимального количества ступеней в отсеке и распределения тепловых перепадов между ступенями очень сложна. Видимо этим и недостаточно накопленными знаниями для создания полной математической модели, описывающей весь комплекс вопросов, связанных с рассматриваемой проблемой, объясняется тот факт, что за последние не одно десятилетие проблема оптимизации количества ступеней в отсеке в полной и строгой математической постановке не ставилась.

Сформулированные в данном разделе методы и созданные алгоритмы позволяют:

- во-первых, служить базой для дальнейшего совершенствования математической модели и усложнения задачи по мере накопления опыта, методик и машинных программ, позволяющих их использование в алгоритме оптимизации проточной части осевой турбины;
- во-вторых, производить анализ влияния тех или иных факторов на оптимальные характеристики отсека, что дает основание для их широкого использования в методических целях, проведения расчетов для понимания происходящих в ступенях процессов, оценки влияния на работу ступени различных составляющих потерь;
- в-третьих, производить распределение тепловых перепадов между ступенями и определять оптимальное количество ступеней в отсеке в рамках модернизации турбины, т.е. при фиксированных окружных скоростях (диаметрах) и заданной форме проточной части или законе изменения осевой составляющей скорости вдоль рассматриваемого цилиндра.

Возможный вариант задания формы проточной части группы n ступеней может быть осуществлен посредством принятия известными осевых и окружных составляющих скорости во всех расчетных сечениях, нумерацию которых будем вести согласно рис.5.1.

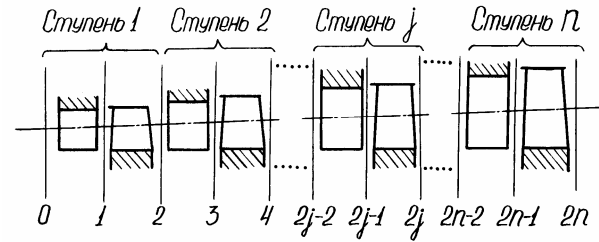


Рис.5.1. Нумерация сечений в проточной части турбинного отсека, состоящего из n ступеней.

Осевые составляющие скорости C_{jz} отнесем к осевой скорости C_{oz} на входе в группу ступеней:

$$C_{jz} = K_{jz} \cdot C_{oz}, \quad (j = \overline{1, 2n}), \quad (5.3)$$

где K_{jz} - заданные величины.

Форму средней линии проточной части определим путем введения коэффициентов

$$K_{ju} = U_j / U_0, \quad (j = \overline{1, 2n}). \quad (5.4)$$

Удовлетворяя условиям (5.3), (5.4) после оптимизации с помощью уравнения неразрывности $G = C_{oz} \rho_o F_o = C_{jz} \rho_i F_j$, $(j = \overline{1, 2n})$ мы можем определить форму образующих проточной части.

Предположим, что нам известны начальные параметры рабочего тела на входе в турбинный отсек и давление на выходе отсека, т.е. известен теоретический перепад на группу n ступеней. Тепловой процесс в группе ступеней с помощью iS - диаграммы изображен на рис. 5.2.

Окружной к.п.д. группы ступеней определяется по формуле

$$\eta_u = \frac{\sum_{j=1}^n h_u^{(j)}}{H_o} = \frac{\sum_{j=1}^n h_u^{(j)}}{i_o^* - i_{2n,t}},$$

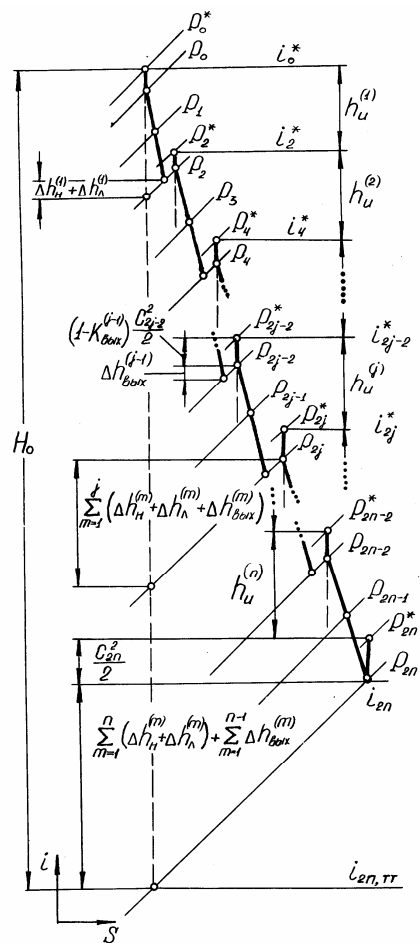


Рис.5.2. Тепловой процесс в iS диаграмме для группы n ступеней.

или с учетом (5.3) и (5.4) в безразмерном виде согласно выражения

$$\eta_u = 2\nu_o^2 \bar{C}_{oz} \sum_{j=1}^n (K_{2j-1,u} K_{2j-1,z} \text{ctg} \alpha_{2j-1} - K_{2j,u} K_{2j,z} \text{ctg} \alpha_{2j}), \quad (5.5)$$

где $\nu_o = U_o / C_{TM}$, $C_{TM}^2 = 2H_o$, $\bar{C}_{oz} = C_{oz} / U_{oz}$.

Потери на лопатках учтем с помощью скоростных коэффициентов $\varphi_j, \psi_j, (j = \overline{1, n})$. Кроме того, предположим, что на выходе из промежуточной ступени часть выходной энергии может быть потеряна. Этот факт учтем путем введения коэффициента $K_{\text{вых}}^{(j)}$, с помощью которого выходная потеря определится

$$\Delta h_{\text{вых}}^{(j)} = K_{\text{вых}}^{(j)} \frac{C_{2j}^2}{2}, \quad (0 \leq K_{\text{вых}}^{(j)} \leq 1; j = \overline{1, n}), \quad (5.6)$$

Вычисляя потери в направляющем аппарате и на рабочих колесах по формуле

$$\Delta h_H^{(j)} = \frac{1 - \varphi_j^2}{\varphi_j^2} \frac{C_{2j-1}^2}{2}, \quad \Delta h_A^{(j)} = \frac{1 - \psi_j^2}{\psi_j^2} \frac{W_{2j}^2}{2}, \quad (j = \overline{1, n})$$

с учетом коэффициента возврата тепла α_n ограничение для перепада на группе из n ступеней можно записать в виде:

$$A_3 \equiv (1 + \alpha_n) H_0 - \sum_{j=1}^n h_u^{(j)} - \sum_{j=1}^n (\Delta h_H^{(j)} + \Delta h_A^{(j)}) - \\ - \sum_{j=1}^{n-1} \Delta h_{\text{вых}}^{(j)} - \frac{C_{2n}^2}{2} = 0 \quad (5.7)$$

Разделив уравнение (5.7) на U_0^2 , с учетом (5.3), (5.4), а также известных кинематических соотношений, связывающих скорости с углами потока, после очевидных преобразований получим выражение для ограничения A_3 в безразмерной форме:

$$A_3 \equiv 2\overline{C}_{oz} \sum_{j=1}^n (K_{2j-1,u} K_{2j-1,z} \text{ctg} \alpha_{2j-1} - K_{2j,u} K_{2j,z} \text{ctg} \alpha_{2j}) + \\ + \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1 - \varphi_j^2}{\varphi_j^2} K_{2j-1,z}^2 \overline{C}_{oz}^2 (1 + \text{ctg}^2 \alpha_{2j-1}) + \frac{1 - \psi_j^2}{\psi_j^2} [K_{2j,z}^2 \overline{C}_{oz}^2 (1 + \text{ctg}^2 \alpha_{2j}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2K_{2j,u}K_{2j,z}\bar{C}_{oz}ctg\alpha_{2j} + K_{2j,u}^2 \Big] + \sum_{j=1}^{n-1} K_{\%dh}^{(j)} K_{2j,z}^2 \bar{C}_{oz}^2 (1 + ctg^2 \alpha_{2j}) + \\
& + K_{2n,z}^2 \bar{C}_{oz}^2 (1 + ctg^2 \alpha_{2n}) - \frac{(1 + \alpha_n)}{\nu_o^2} = 0 \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Ставится задача определения углов α_j таким образом, чтобы, при заданных параметрах $\nu_0, \bar{C}_{oz}, K_{ju}, K_{jz}, (j = \overline{1, 2n})$ и принятых, исходя из каких-то соображений (либо определяемых по одной из возможных методик), величин скоростных коэффициентов $\varphi_j, \psi_j, K_{\%dh}^{(j)}, (j = \overline{1, n})$, достигался максимум функционала (5.5) и удовлетворялось ограничение (5.8).

Математическая запись сформулированной задачи сводится к следующему:

Найти

$$\begin{aligned}
& \max_{ctg\alpha_j} \eta_u = \sum_{j=1}^n h_u^{(j)} / H_o \\
& (j = \overline{1, 2n})
\end{aligned}$$

при ограничении (5.8).

Используя метод штрафных функций [16], сводим задачу поиска экстремума при наличии ограничения к задаче без ограничения для присоединенной целевой функции

$$I^* = \eta_u - \Lambda A_3^2, \quad (5.9)$$

где Λ - штрафной коэффициент.

Составленная программа максимизации целевой функции многих переменных (5.9) с помощью метода сопряженных градиентов или других градиентных методов [16] позволяет решать не только задачу оптимизации, но и производить тепловой расчет с заданными α_1 и α_2 для всех n ступеней.

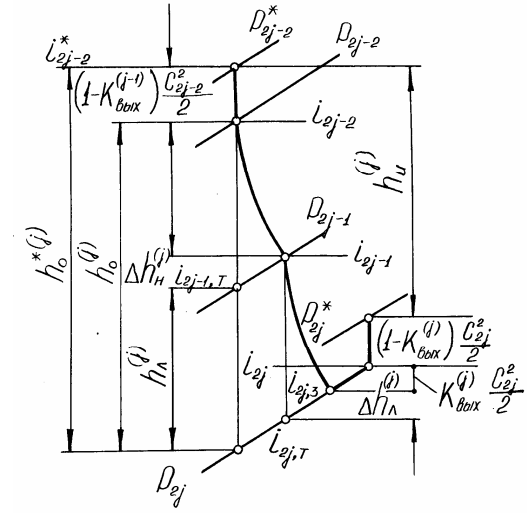


Рис.5.3. Тепловой процесс в iS диаграмме для промежуточной j -ой ступени.

При заданных вдоль отсека значениях коэффициентов скорости φ_j, ψ_j решение поставленной задачи упрощается в связи с возможностью ее решения методом неопределенных множителей Лагранжа. Дифференцируя по переменным $\text{ctg} \alpha_j$ ($j = \overline{1, 2n}$) функцию Лагранжа

$$\tilde{L} = \eta_u + \Lambda A_3, \quad (5.10)$$

где Λ - множитель Лагранжа, находим следующие необходимые условия экстремума

$$\frac{1}{\Lambda} = -\frac{1}{v_o^2} \left(1 + \frac{1 - \varphi_j^2}{\varphi_j^2} \frac{K_{2j-1,z}}{K_{2j-1,u}} \bar{C}_{oz} \text{ctg} \alpha_{2j-1} \right), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\Lambda} = -\frac{1}{v_o^2} \left[\frac{1}{\psi_j^2} - \left(\frac{1 - \psi_j^2}{\psi_j^2} + K_{\text{вых}}^{(j)} \right) \frac{K_{2j,z}}{K_{2j,u}} \bar{C}_{oz} \text{ctg} \alpha_{2j} \right], \quad (j = \overline{1, n-1}) \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{\Lambda} = -\frac{1}{\nu_o^2 \psi_n^2} \left(1 - \frac{K_{2n,z}}{K_{2n,u}} \bar{C}_{oz} \operatorname{ctg} \alpha_{2n} \right) \quad (5.13)$$

Выражая все $\operatorname{ctg} \alpha_j$ ($j \neq 2n$) через $\operatorname{ctg} \alpha_{2n}$, и исключая Λ согласно третьей формуле получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_{2j-1} &= \frac{1}{\mu_j} \frac{K_{2j-1,u}}{K_{2j-1,z}} \left(\frac{1 - \psi_n^2}{\bar{C}_{oz}} - \frac{K_{2n,z}}{K_{2n,u}} \operatorname{ctg} \alpha_{2n} \right), \\ (j = \overline{1, n}); \\ \operatorname{ctg} \alpha_{2j} &= \frac{1}{\chi_j + \psi_n^2 K_{\text{блх}}^{(j)}} \frac{K_{2j,u}}{K_{2j,z}} \left(\frac{\psi_n^2 - \psi_j^2}{\psi_j^2 \bar{C}_{oz}} + \frac{K_{2n,z}}{K_{2n,u}} \operatorname{ctg} \alpha_{2n} \right), \\ (j = \overline{1, n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

$$\text{где } \mu_j = \psi_n^2 \frac{1 - \varphi_j^2}{\varphi_j^2}, \chi_j = \psi_n^2 \frac{1 - \psi_j^2}{\psi_j^2}.$$

Подставляя найденные таким образом $\operatorname{ctg} \alpha_{2j-1}$ и $\operatorname{ctg} \alpha_{2j}$ в уравнение (5.8), получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} \alpha_{2n}^{\text{opt}}$

$$D \operatorname{ctg}^2 \alpha_{2n}^{\text{opt}} + E \operatorname{ctg} \alpha_{2n}^{\text{opt}} + F = 0, \quad (5.15)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \frac{K_{2n,z}^2}{K_{2n,u}} \frac{\bar{C}_{oz}^2}{\psi_n^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{K_{2j-1,u}^2}{\mu_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{K_{2j,u}^2}{\chi_j + \psi_n^2 K_{\text{блх}}^{(j)}} + K_{2n,u}^2 \right), \\ E &= -2 \frac{K_{2n,z}}{K_{2n,u}} \frac{\bar{C}_{oz}}{\psi_n^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{K_{2j-1,u}^2}{\mu_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{K_{2j,u}^2}{\chi_j + \psi_n^2 K_{\text{блх}}^{(j)}} - K_{2n,u}^2 \right), \\ F &= \frac{\bar{C}_{oz}^2}{\psi_n^2} \left[\sum_{j=1}^n \mu_j K_{2j-1,z}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} K_{2j,z}^2 (\chi_j + \psi_n^2 K_{\text{блх}}^{(j)}) + K_{2n,z}^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{1}{\psi_n^2} - \psi_n^2 \right) K_{2j-1,u}^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{K_{2j,u}^2}{\chi_j + \psi_n^2 K_{\text{блх}}^{(j)}} \left(\frac{\psi_n^2}{\psi_j^4} - \frac{1}{\psi_n^2} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^n K_{2j,u}^2 \frac{1 - \psi_j^2}{\psi_j^2} - \frac{1 + \alpha_n}{\nu_o^2}
\end{aligned}$$

Используя решение этого уравнения, затем определяем все оптимальные углы $\text{ctg} \alpha_j^{\text{opt}} (j = \overline{1, 2n-1})$ по (5.14), а также оптимальный к.п.д. как функции заданных параметров с помощью (5.5).

Рассмотрим важный частный случай, когда $K_{j,u} = K_{j,z} = 1$, $(j = \overline{1, 2n})$; $K_{\text{блх}}^{(j)} = K_{\text{блх}}$, $(j = \overline{1, n-1})$; $\varphi_j = \varphi$, $\psi_j = \psi$, $(j = \overline{1, n})$. В этом случае формулы (5.14) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned}
\text{ctg} \alpha_{2j-1} &= \frac{1 - \psi^2}{\mu \bar{C}_{oz}} - \frac{1}{\mu} \text{ctg} \alpha_{2n}, (j = \overline{1, n}); \\
\text{ctg} \alpha_{2j} &= \frac{\text{ctg} \alpha_{2n}}{1 - \psi^2 (1 - K_{\text{блх}})}, (j = \overline{1, n-1}),
\end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

$$\text{где } \mu = \psi^2 \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2}.$$

После подстановки (5.16) в (5.8) имеем квадратное уравнение вида (5.15) со следующими значениями коэффициентов:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\bar{C}_{oz}^2}{\psi^2} \left[\frac{n}{\mu} + \frac{n-1}{1 - \psi^2 (1 - K_{\text{блх}})} + 1 \right], \\
E &= -2 \frac{\bar{C}_{oz}}{\psi^2} \left(\frac{n}{\mu} + \frac{n-1}{1 - \psi^2 (1 - K_{\text{блх}})} + 1 \right) \\
F &= \frac{\bar{C}_{oz}}{\psi^2} \left\{ 1 + n\mu + (n-1) [1 - \psi^2 (1 - K_{\text{блх}})] \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{n}{\psi^2} \left[\frac{1-\psi^4}{\mu} + (1-\psi^2) \right] - \frac{1+\alpha_n}{v_0^2},$$

из которого и находятся оптимальное значение $ctg \alpha_{2n}$, затем $ctg \alpha_j$ ($j = 1, 2n-1$) из (5.16), оптимальный к.п.д.

$$\eta_u = 2v_0^2 n \left\{ \frac{1-\psi^2}{\mu} - \bar{C}_{oz} ctg \alpha_{2n} \left[\frac{1}{\mu} + \frac{n-\psi^2(1-K_{блх})}{n[1-\psi^2(1-K_{блх})]} \right] \right\}, \quad (5.17)$$

оптимальные значения отношений скоростей ступеней

$$v_j = \frac{U_j}{C_{tmj}} = \left[2\bar{C}_{oz} ctg \alpha_{2j-1} + \frac{1-\phi^2}{\phi^2} \bar{C}_{oz}^2 (1+ctg^2 \alpha_{2j-1}) + \frac{\bar{C}_{oz}^2 (1+ctg^2 \alpha_{2j}) - \frac{2\bar{C}_{oz}}{\psi^2} ctg \alpha_{2j} + \frac{1-\psi^2}{\psi^2}}{\psi^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.18)$$

оптимальные реактивности

$$R = \frac{\phi^2 - \bar{C}_{oz}^2 (1+ctg^2 \alpha_{2j-1}) v_j^2}{\phi^2 [1 - \bar{C}_{oz}^2 (1+ctg^2 \alpha_{2j-2}) (1-K_{блх}) v_j]} \quad (5.19)$$

При принятых выше условиях мы видим, что все ступени, кроме последней, одинаковы. Последняя ступень отличается от всех предыдущих, что связано с необходимостью уменьшения выходной потери, которая полностью теряется на этой ступени ($K_{блх}^{(n)} = 1$).

По формулам (5.16) - (5.19) при значениях $\phi^2 = 0,96$, $\psi^2 = 0,9$ в широком диапазоне значений \bar{C}_{oz} от 0,2 до 1,0 и $K_{блх}$ от 0 до 1 были проведены расчеты, результаты которых для величин $\bar{C}_{oz} = 0,4$ и $K_{блх} = 0,1$ приводятся на рис.5.4.

Расчеты показали, что для каждого значения $v_o = U / C_{tm}$, т.е. для заданной величины теплоперепада H_o при фиксированной окружной скорости U , существует оптимальное количество сту-

пеней, при котором достигается максимум коэффициента полезного действия отсека.

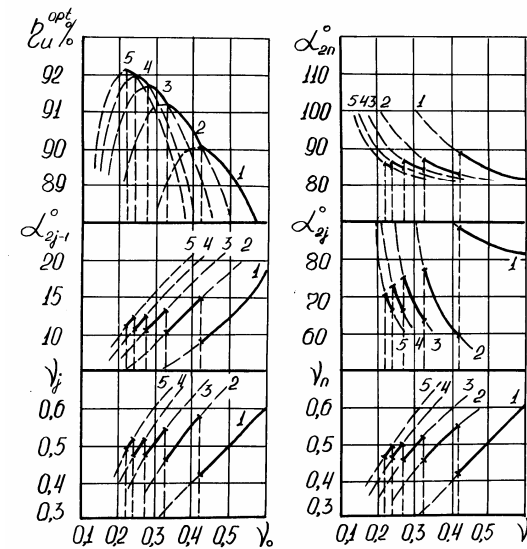


Рис. 5.4. Расчетные оптимальные значения углов выхода потока, отношения скоростей промежуточных и последней ступеней, к.п.д. отсека при различных значениях перепада на отсек ($\overline{C}_{oz}=0,4$, $\varphi^2=0,96$, $\psi^2=0,9$, $K_{блх}=0,1$;

($j = \overline{1, n-1}$). Цифры на кривых обозначают количество ступеней в отсеке. Жирной линией изображена огибающая параметров, соответствующая максимуму к.п.д.

При условии полного использования выходной скорости в промежуточных ступенях ($K_{блх} = 0$) углы выхода потока из рабочих колес промежуточных ступеней α_{2j} , ($j \neq n$) могут сильно отличаться от 90° . Угол выхода потока из последней ступени α_{2n} в соответствии с результатами расчета необходимо делать близким к 90° , что соответствует минимуму потерь с выходной скоростью. Углы выхода потока из направляющих аппаратов лежат в пределах $10...17^\circ$, оптимальное значение отношения скоростей в пределах $0,48...0,58$. При этом с увеличением количества ступеней в отсеке

диапазон приемлемого изменения вышеперечисленных величин сужается.

В случае потери выходной скорости в промежуточных ступенях ($K_{вых} > 0$) картина несколько меняется. Увеличивается значение перепада, при котором целесообразно перейти на большее количество ступеней, углы выхода потока из промежуточных ступеней α_{2j} также становятся близкими к 90° . Наблюдается уменьшение значений отношения скоростей ν_j , углов выхода потока из направляющих аппаратов α_{2j-1} , что приводит к небольшому падению оптимальной степени реактивности, как для промежуточных, так и для последней ступеней.

В случае **одиночной ступени**. полагая $n=1$, окружной к.п.д. ступени определяется выражением

$$\eta_u = h_u / h_0 = \frac{U_1 C_{1U} - U_2 C_{2U}}{i_0^* - i_{2TT}}$$

Из (5.5) в безразмерном виде получаем

$$\eta_u = 2\nu_{oz}^2 \bar{C}_{oz} (K_{1U} K_{1Z} \text{ctg} \alpha_1 - K_{2U} K_{2Z} \text{ctg} \alpha_2). \quad (5.20)$$

Для ограничений \bar{A}_1 , \bar{A}_2 и \bar{A}_3 из уравнений (5.15) (5.8) записываем (см. обозначения на рис.5.1):

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\equiv i_0^* - i_1 - C_1^2 / 2 = 0, \\ A_2 &\equiv i_0^* - i_2 - h_U - C_2^2 / 2 = 0, \\ A_3 &\equiv i_0^* - i_{2TT} - h_U - \Delta h_H - \Delta h_A - C_2^2 / 2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Привлекая кинематические соотношения, связывающие скорости с углами потока, с помощью треугольников скоростей имеем

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv 1 - \frac{i_1}{i_0^*} - \frac{k-1}{k+1} \lambda_0^2 K_{1Z}^2 \frac{1 + \text{ctg}^2 \alpha_1}{1 + \text{ctg}^2 \alpha_0} = 0. \\ A_2 &\equiv 1 - \frac{i_2}{i_0^*} - \frac{k-1}{k+1} \lambda_0^2 K_{2Z}^2 \frac{1 + \text{ctg}^2 \alpha_2}{1 + \text{ctg}^2 \alpha_0} - \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$-2 \frac{k-1}{k+1} \frac{\lambda_0^2}{\bar{C}_{oz} (1 + ctg^2 \alpha_0)} \times (K_{1U} K_{1Z} ctg \alpha_1 - K_{2U} K_{2Z} ctg \alpha_2) = 0. \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} A_3 \equiv & 2K_{1U} K_{1Z} \bar{C}_{oz} ctg \alpha_1 - 2 \frac{K_{2U} K_{2Z}}{\psi^2} \bar{C}_{oz} ctg \alpha_2 + \\ & + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \bar{C}_{oz}^2 K_{1Z}^2 (1 + ctg^2 \alpha_1) + \frac{K_{2Z}^2}{\psi^2} \bar{C}_{oz}^2 (1 + ctg^2 \alpha_2) + \\ & + \frac{1-\psi^2}{\psi^2} K_{2U}^2 - 1/\nu_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

В вышеприведенных выражениях для удобства расчетов введен безразмерный коэффициент

$$\lambda_0 = C_0 / a_* \quad (5.25)$$

где C_0 - скорость на входе в ступень, легко определяемая через C_{0z} и α_0 ;

$$a_* = \sqrt{2 \frac{k-1}{k+1} i_0^*} \quad - \text{ скорость, эквивалентная критической для}$$

идеального рабочего тела.

В случае совершенного газа λ_0 является приведенной скоростью на входе в ступень.

Задача оптимизации ступени решается с помощью метода сопряженных градиентов [16] путем максимизации присоединенной целевой функции $I^* = \eta_u - \Lambda A_3^2$, где (как и в (5.9)) Λ - штрафной коэффициент.

В случае заданных величин скоростных коэффициентов φ и ψ из (5.14) получаем зависимость между α_1^{opt} и α_2^{opt}

$$ctg \alpha_1^{opt} = \frac{1}{\mu} \frac{K_{1u}}{K_{1z}} \left(\frac{1-\psi^2}{\bar{C}_{0z}} - \frac{K_{2z}}{K_{2u}} ctg \alpha_2^{opt} \right), \quad (5.26)$$

где обозначено

$$\mu = \frac{\psi^2(1-\varphi^2)}{\varphi^2}$$

Для определения $ctg\alpha_2^{opt}$ необходимо воспользоваться квадратным уравнением (5.15), в котором в случае одиночной ступени коэффициенты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\bar{C}_{oz}^2 K_{2z}^2}{\psi^2} \left(1 + \frac{1}{\mu} \frac{K_{1u}^2}{K_{2u}^2} \right), \\ E &= -\frac{2K_{2u} K_{2z} \bar{C}_{oz}}{\psi^2} \left(1 + \frac{1}{\mu} \frac{K_{1u}^2}{K_{2u}^2} \right), \\ F &= \frac{1-\psi^4}{\psi^2} \frac{K_{1u}^2}{\mu} + \frac{\bar{C}_{0z}^2 K_{2z}^2}{\psi^2} \left(1 + \mu \frac{K_{1z}^2}{K_{2z}^2} \right) + \frac{1-\psi^2}{\psi^2} K_{2u}^2 - \frac{1}{v_0^2}. \end{aligned}$$

Степень реактивности R одиночной ступени находим по формуле:

$$R = \frac{h_0 - \frac{1}{2}(C_1/\varphi)^2}{h_0 - C_0^2/2} = \frac{1 - \frac{K_{1z}}{\varphi^2} \bar{C}_{oz}^2 v_0^2 (1 + ctg^2 \alpha_1)}{1 - \bar{C}_{oz}^2 v_0^2 (1 + ctg^2 \alpha_0)} \quad (5.27)$$

В случае, когда φ и ψ являются функциями параметров потока, для одиночной ступени решение задачи определения оптимальных параметров можно упростить, используя метод последовательных приближений:

1. Задаемся начальным приближением φ , ψ и определяем параметры ступени по выведенным формулам.
2. Пересчитываем коэффициенты скорости согласно полученным параметрам и возобновляем вычисления п.1.

Расчетные исследования показали, что такой процесс сходится с высокой точностью за несколько итераций.

Для исследования влияния безразмерных параметров на оптимальные характеристики ступени по составленным программам на ЭВМ проводилось расчетное исследование при различных предположениях относительно потерь в ступени. Коэффициенты скорости

в расчетах принимались как постоянными, так и зависящими от параметров потока. В последнем случае их определение производилось с помощью упрощенных зависимостей [138] и несколько увеличенными потерями на рабочих лопатках:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^2 &= 1 - 0,025 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_\alpha}{90} \right)^2 \right], \\ \psi^2 &= 1 - 0,04 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_\beta}{90} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

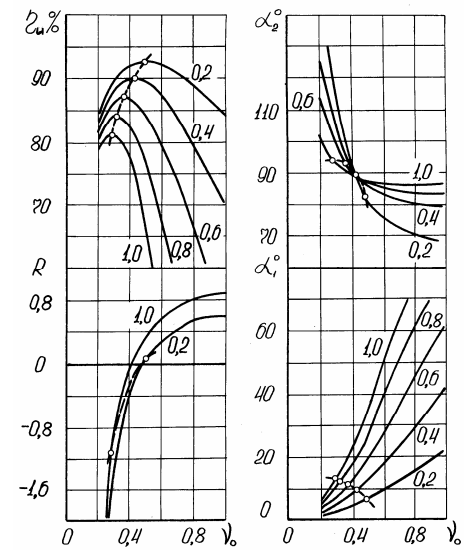


Рис. 5.5. Оптимальные характеристики турбинной ступени ($\varphi^2 = 0,96$, $\psi^2 = 0,9$).

Цифрами обозначены значения \bar{C}_{oz} . Кругочками помечены параметры при оптимальной величине перепада на ступень.

Учет увеличения потерь на рабочих лопатках при наличии отрицательной степени реактивности производился искусственно по формуле

$$\psi^2 = \begin{cases} \psi^2, & \text{определяемое с помощью (5.28), если } W_1 \leq W_2; \\ \frac{\psi^2}{\psi^2 + \frac{W_1^2}{W_2^2}(1 - \psi^2)}, & \text{если } W_1 > W_2. \end{cases} \quad (5.29)$$

Наиболее полно расчеты проведены для важного частного случая, когда $K_{jz}=K_{ju}=1$ ($j=1,2$).

Проведенное расчетное исследование позволило определить оптимальные параметрические зависимости к.п.д., углы α_1 и α_2 , реактивность R , коэффициенты скорости φ , ψ и коэффициенты потерь ξ_n , ξ_1 , $\xi_{вых}$ от \bar{C}_{0Z} и v_0 . Результаты расчетов приведены на рис.5.5 – 5.7.

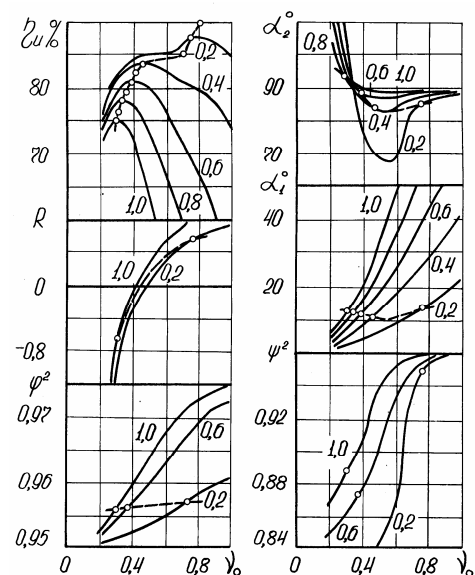


Рис. 5.6. Оптимальные характеристики турбинной ступени с коэффициентами скорости, вычисляемыми по формулам (5.28). Цифрами обозначены величины \bar{C}_{0Z} . Кружочками помечены параметры при оптимальной величине перепада на ступень.

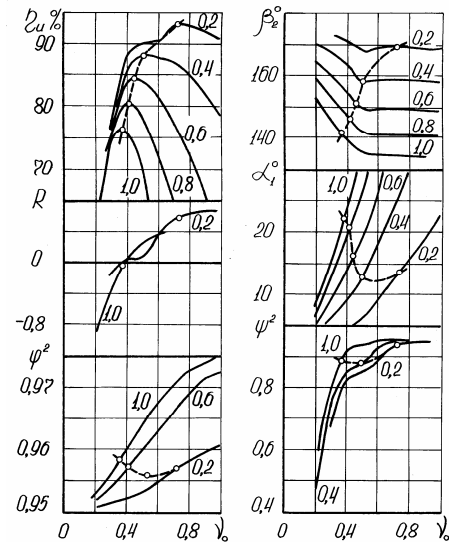


Рис. 5.7. Оптимальные характеристики турбинной ступени (φ и ψ вычислялись по формулам (5.28) с пересчетом ψ согласно (5.29) при отрицательной степени реактивности). Цифрами обозначены величины \bar{C}_{oz} .

5.3. Оптимизация многоступенчатой турбины методом нелинейного программирования

Оптимизация параметров многоступенчатой турбины при заданной форме проточной части более сложна, чем при заданных осевых составляющих скорости, из-за необходимости включения в систему ограничений уравнений движения рабочего тела в осевых зазорах. Одномерная оптимизация группы ступеней возможна на основе как прямой, так и обратных задач расчета одиночной ступени, рассмотренных ранее. Если использовать модели проверочного расчета и обратной задачи с заданной степенью реактивности, решение оптимизационной задачи можно определять с помощью методов нелинейного программирования.

Остановимся сначала на оптимизации отсека с использованием уравнений прямой задачи расчета ступени. Если считать рабочее

тело совершенным газом, нетрудно записать для каждой из ступеней отсека уравнения движения в безразмерном виде и ограничение на тепловой перепад, аналогичные (5.21). В результате получим систему ограничений, которую ввиду громоздкости выражений приведем в общем виде:

$$\begin{aligned} A_{2l-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2l-1}, \operatorname{ctg} \alpha_1, \dots, \operatorname{ctg} \alpha_{2l-1}) &= 0; \\ A_{2l}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2l}, \operatorname{ctg} \alpha_1, \dots, \operatorname{ctg} \alpha_{2l}) &= 0, \quad l=1, \dots, n; \\ A_{2n+1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}, \operatorname{ctg} \alpha_1, \dots, \operatorname{ctg} \alpha_{2n}, v_0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Окружной КПД группы

$$\eta_u = \eta_u(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}, \operatorname{ctg} \alpha_1, \dots, \operatorname{ctg} \alpha_{2n}). \quad (5.31)$$

Стоит задача определения углов α_{2l-1} , α_{2l} , а также безразмерных плотностей $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}$ таким образом, чтобы достигался максимум целевой функции (5.31) и удовлетворялись $(2n + 1)$ ограничения в виде равенств (5.30). Для решения задачи методом внешних штрафных функций составляется присоединенная целевая функция

$$I_k^* = \eta_u - A_k \sum_{j=1}^{2n+1} A_j^2, \quad (5.32)$$

где A_k – штрафной коэффициент; A_j – ограничения (5.30), и ищется ее безусловный максимум по переменным α_j, ε_j ($j = 1, \dots, 2n$).

Если проектируется проточная часть паровой турбины, исходные данные оптимизационной задачи в основном совпадают с параметрами, которые задают для проверочного расчета проточной части: $P_0^*, i_0^*, P_{2зад}, \omega, D_{cp,j}, l_j, j=1, \dots, 2n$, за исключением подлежащих определению эффективных углов решеток α_{1l}, β_{2l} ($l = 1, \dots, n$). Кроме того, предполагается заданным расход рабочего тела G . Система ограничений задачи совпадает с уравнениями (2.63), которые описывают одномерное движение рабочего тела в многоступенчатой турбине, а присоединенная целевая функция имеет вид

$$I_k^* = \eta_u - A_k \left[\sum_{l=1}^n (g_{1l}^2 + g_{2l}^2) + h^2 \right]. \quad (5.33)$$

Ее максимум следует искать по переменным α_{2l-1} , c_{1l} , β_{2l} , w_{2l} ($l = 1, \dots, n$). В отличие от проверочного расчета, в оптимизационных задачах коэффициенты скорости венцов вычисляем непосредственно при расчете ограничений по той же причине, что и для одиночной ступени.

Несколько иначе решается задача одномерной оптимизации многоступенчатой турбины на основе обратной задачи расчета ступени по заданной степени реактивности. Как мы помним, даже не предполагая рабочее тело совершенным газом, с ее помощью можно рассчитывать параметры ступени без решения сложной системы трансцендентных уравнений. В силу этого задача одномерной оптимизации ступени оказывается задачей нелинейного программирования без ограничений, что существенно облегчает ее решение. Не составляет труда произвести расчет многоступенчатой турбины, задав степень реактивности и давление на выходе каждой из ступеней. Для этого после расчета текущей ступени находятся параметры торможения на выходе из нее, которые дают возможность начать расчет следующей ступени. Мощность отсека

$$N_{omc} = \sum N_l(P_{0l}^*, i_{0l}^*, R_l, P_{2l}), \quad (5.34)$$

а его КПД $\eta = \eta(R_1, \dots, R_n, P_2, P_4, \dots, P_{2n-2})$ является функцией $(2n-1)$ параметра. Оптимизация проточной части состоит в выборе таких значений этих параметров, чтобы функция η достигла максимума. Следовательно, как и для одиночной ступени, получается задача безусловной нелинейной оптимизации.

Несмотря на полную аналогию постановок задач одномерной оптимизации многоступенчатой турбины и одиночной ступени, их успешное решение для достаточно больших n весьма проблематично. Это прежде всего связано с высокой размерностью вектора варьируемых параметров: при оптимизации на базе прямой задачи она составляет $4n$, на базе обратной - $(2n - 1)$. Хуже всего обстоят дела с определением экстремума присоединенных целевых функций (5.32), (5.33), овражный характер которых препятствует

эффективной работе численных методов нелинейного программирования. В этом авторы могли убедиться, решая задачу одномерной оптимизации многоступенчатой турбины с помощью функции (5.32).

Общий недостаток методов нелинейного программирования при оптимизации многоступенчатых турбин заключается в сложности учета различного рода ограничений аэродинамического и прочностного характера. Это обстоятельство заставляет при проектировании проточной части многоступенчатой турбины искать альтернативные подходы, например, алгоритм на основе метода динамического программирования, описанный в [15].

5.4. Автоматизация предварительного проектирования проточной части многоступенчатых паровых турбин

Описание метода

На ранних этапах создания проточной части (ПЧ) турбины, когда определяются диаметры, высоты лопаток, теплоперепады и другие основные характеристики ступеней, требуется проработка альтернативных вариантов с целью принятия проектного решения, наилучшего в смысле некоторого критерия качества. Наиболее эффективно эта задача решается в рамках создаваемых САПР проточной части турбин, т.к. удастся: достичь рационального разделения функций конструктора, определяющего стратегию проектирования и ЭВМ, быстро и безошибочно выполняющей сложные расчеты и представляющей результаты в удобной для человека числовой или графической форме; учесть большое количество различных факторов, влияющих на экономичность, надежность, технологичность, себестоимость и другие показатели качества создаваемой конструкции; организовать диалоговое или полностью автоматическое определение оптимальных параметров и т.д.

Большинство методов оптимизации параметров многоступенчатых турбин предназначено для выбора ряда геометрических и газодинамических параметров на основе известного прототипа, характеристики которого принимаются за начальное приближение.

При использовании сложных математических моделей, большим числе переменных и ограничений, решение подобных задач

требует значительных затрат машинного времени и для целей САПР, где требуется быстрая редакция системы, зачастую неприемлемо.

Желательно иметь способ проектирования, который сочетает простоту, надежность, быстроту получения результата с точностью используемых математических моделей, большим количеством учитываемых и оптимизируемых факторов, глубиной поиска оптимального варианта. При этом неизбежны определенные допущения, главными из которых являются: синтез параметров "хорошей", конкурентоспособной конструкции без привлечения точных моделей расчета; детальный анализ и уточнение параметров, не учитываемых на первом этапе; оптимизация основных параметров путем многократного выполнения этапов синтеза и анализа.

Проектирование ПЧ в такой постановке будем называть предварительным (ПП). ПП не претендует на такую детальную оптимизацию параметров, как в упоминавшихся выше методах оптимального проектирования. Его цель - предложить работоспособную, достаточно эффективную конструкцию, характеристики которой при необходимости могут быть выбраны за начальное приближение в более точных расчетах.

Основными проблемами, стоящими при создании метода ПП являются:

- рациональный подход к задаче предварительного проектирования, выбор критериев качества и системы ограничений;
- разработка метода выбора основных параметров многоступенчатой проточной части;
- формирование требований к комплексу математических моделей, описывающих различные аспекты функционирования турбины и их эффективная численная реализация;
- выбор подходящего алгоритма поиска оптимального решения;
- создание гибкого программного обеспечения диалогового решения задачи проектирования в различных постановках и наглядное представление результатов.

Предполагается, что ПП ПЧ будет вестись непосредственно после расчета тепловой схемы турбоустановки при известных для каждого из цилиндров параметрах пара i_0^* , P_0^* , на входе, противо-

давлениях за отсеками P_{2j} , расходах через них G_j ($j=1, \dots, n_{\text{отс}}$) и частоте вращения ротора ω . Ставится задача выбора количества ступеней в отсеках n_j , корневых диаметров D_{kj} и высот лопаток ступеней таким образом, чтобы добиться максимальной мощности цилиндра при обеспечении надежности, технологичности или любых других (материалоемкость, себестоимость, габариты и т.п.) заранее оговоренных требований. Минимальные ограничения по надежности регламентируются допустимыми (с учетом коэффициентов запаса) статическими напряжениями в рабочих лопатках и диафрагмах, а также отстройкой рабочих лопаток постоянного сечения от резонанса. Технологические ограничения сводятся к определенному конструктивному исполнению ПЧ, заданию определенной чистоты обработки поверхностей, а также применению унифицированных элементов — профилей, хвостовиков и т.д. Распространенным для ЦВД и ЦСД мощных паровых турбин является требование унификации лопаточного аппарата, когда все ступени образуются подрезкой сверху сопловых и рабочих лопаток последней ступени отсека. При этом выдерживается постоянный корневой диаметр, углы α_{1k} и β_{2k} , а также степень реактивности R_k у корня при равномерной разбивке теплоперепадов между ступенями и постоянной осевой составляющей скорости в сечениях.

Рассмотрим способы формирования ПЧ цилиндра, состоящего из отсеков, удовлетворяющих, в частности, указанным требованиям унификации. Идея метода неоднократно высказывалась ранее. Применим ее к автоматизированному проектированию ПЧ, а также сделаем некоторые видоизменения и обобщения.

Методы синтеза ПЧ

Рассмотрим сначала одну из постановок задачи ПП, которую назовем задачей I, применительно к отсеку.

Пусть заданы корневой диаметр D_k , корневая степень реактивности R_k и угол α_{k1} . Сопловые и рабочие лопатки считаются закрученными по закону $C_u = \text{const}$, что дает:

$$R_1 \text{ctg} \alpha_1 = \text{const}, r_2 \text{ctg} \beta_2 = \text{const}, \quad (5.35)$$

а для изменения степени реактивности вдоль радиуса справедливо соотношение

$$R_{cp} = 1 - \frac{\bar{c}_z \frac{u}{C_0}}{\varphi} \left[1 - \left(\frac{D_K}{D_K + l_1} \right)^2 \right] - \left(\frac{D_K}{D_K + l_1} \right)^2 (1 - R_K)$$

или приближенная формула

$$R_{cp} = 1 - (1 - R_K) \left(1 - \frac{l_1}{D_K + l_1} \right)^{1,8}. \quad (5.36)$$

Прежде всего строится предполагаемый процесс расширения пара в отсеке. Поскольку не известны ни количество, ни геометрические характеристики ступеней, сделать это можно только весьма приближенно, вычислив к.п.д. отсека $\eta_{iомс}$, например, по методике [139]. Это дает возможность найти параметры пара в конце действительного процесса расширения и, приняв этот процесс линейным, оценить термодинамические параметры при любом давлении

$$P_{2потс} \leq P \leq P_0^*.$$

Для выбора количества ступеней в отсеке допускаем приблизительно равномерную разбивку теплоперепадов по ступеням. Тогда задав отношение скоростей u/C_o или, оценив его оптимальное (т.е. соответствующее осевому выходу потока из ступени – $\alpha_2 = 90^\circ$) значение, скажем, по формуле [27]

$$v_o = \frac{u}{C_o} = \frac{\varphi \cos \alpha_1}{2\sqrt{1 - R_{cp}}} \text{ или } v_K = \frac{u_K}{C_o} = \frac{\varphi \cos \alpha_{1K}}{2\sqrt{1 - R_K}}, \quad (5.37)$$

можно получить, что

$$n = \frac{H_o - \frac{C_{BX}^2}{2}}{\frac{1}{8} \left(\frac{\omega D_K}{v_K} \right)^2 - \frac{C_{BX}^2}{2}}, \quad (5.38)$$

где H_o – располагаемый теплоперепад отсека;

C_{BX} – скорость потока на входе в отсек.

(n округляется до ближайшего целого).

Скорость C_{BX} , равная осевой составляющей, определяется с учетом (5.37) по формуле

$$C_{BX} \approx C_{1Z} = C_{1K} \sin \alpha_{1K} = \sqrt{2H_o(1-R_K) \sin^2 \alpha_{1K}} = \quad (5.39)$$

$$= \sqrt{\frac{4u_k^2(1-R_k)^2 \sin^2 \alpha_{1k}}{\varphi^2 \cos^2 \alpha_{1k}}} = \omega \frac{D_k}{\varphi} (1-R_k) \operatorname{tg} \alpha_{1k}.$$

(φ принимается равным 0,96... 0,98).

Вводя обозначения

$$\Delta i = \frac{i_o^* - \frac{C_{BX}^2}{2} - i_{2n_{omc}}}{n},$$

$$\Delta S = -\frac{S_o^* - S_{2n_{omc}}}{n},$$

по предполагаемому процессу расширения пара для каждой из ступеней параметры в межвенцовом зазоре без большой ошибки определяем на основании зависимостей:

$$P_{1j} = P(i_o^* - \frac{C_{BX}^2}{2} - (j-1)\Delta i + \frac{C_{1Z}^2}{2} - (1-R_{cpj})(\frac{\Delta i}{\eta_{ioom}} + \frac{C_{1Z}^2}{2})), \quad (5.40)$$

$$S_o^* + (j-1)\Delta S + (1-R_{cpj})\Delta S;$$

$$i_{1j} = i(P_{1j}, S_o^* + (j+1)\Delta S + (1-R_{cpj})\Delta S); \quad (5.41)$$

$$\zeta_{1j} = \zeta(P_{1j}, i_{1j}), j=1, \dots, n. \quad (5.42)$$

Давления за ступенями равны

$$P_{2j} = P(i_o^* - \frac{C_{BX}^2}{2} - j\Delta i, S_o^* + j\Delta S).$$

Высоты сопловых лопаток определяются из уравнения неразрывности

$$G_j = \pi l_{1j} (D_K + l_{1j}) \zeta_{1j} C_{1Z}, \quad (5.43)$$

где C_{1z} берется из (5.39).

Решая (5.43) как квадратное уравнение, находим

$$l_{1j} = \frac{1}{2} \left(-D_K + \sqrt{D_K^2 + \frac{4G_j}{\pi \zeta_{1j} C_{1z}}} \right). \quad (5.44)$$

Поскольку величина $R_{срj}$, входящая в (5.4.0) - (5.4.2), зависит от высот лопаток, необходимо итерационное уточнение всех определяемых величин по формулам (5.36), (5.40) - (5.42), (5.44). Беря в качестве начального приближения $R_K=0$, обычно достигнем сходимости за 2 - 4 итерации.

Вместо α_{1k} можно задаться, скажем, отношением $D_{ср}/l$ 1-й ступени. Назовем эту постановку задачей II. В этом случае сразу же находим высоту лопатки 1-й ступени

$$l_1 = \frac{D_K}{D_{ср} / l - 1}$$

и степень реактивности 1-й ступени на среднем радиусе по (5.36).

Угол α_1 1-й ступени определяется на основании уравнения неразрывности

$$G = \pi \zeta_1 c_1 \sin \alpha_1 (D_K + l_1) l_1, \quad (5.45)$$

очевидного соотношения

$$c_1^2 = \varphi^2 C_o^2 (1 - R_{ср}) = \frac{\varphi^2 \omega^2 (D_K + l_1)^2 (1 - R_{ср})}{4V^2} \quad (5.46)$$

и условий (5.37), что после несложных выкладок дает

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{G}{\pi \zeta_1 (D_K + l_1)^2 l_1 (1 - R_{ср}) \omega}. \quad (5.47)$$

Далее, исключив из (5.46) C_o с помощью (5.37), получаем

$$c_1 = \omega (D_K + l_1) (1 - R_{ср}) / \cos \alpha_1, \quad C_{ВХ} \approx c_1 \sin \alpha_1. \quad (5.48)$$

Наивыгоднейшее число ступеней в отсеке находится по (5.38). В остальном метод II не отличается от метода I.

С введением коэффициента

$$K_z = \frac{C_{BX}}{C_{1z,n}}$$

методы I и II обобщаются на случай, когда осевые составляющие скорости линейно изменяются от ступени к ступени. Для этого в формулах (5.40), (5.43) и (5.44) C_{1z} следует заменить на величину

$$C_{1z,j} = C_{BX} [1 + (K_z - 1)(j - 1)/(n_{отс} - 1)].$$

Следует иметь в виду, что при $K_z \neq 1$ условие унификации лопаточных аппаратов ($\alpha_{1K} = \text{const}$, $\beta_{2K} = \text{const}$) не выполняется.

Таким образом, в результате решения задач ПП в постановке I (II) оказываются определенными основные характеристики ПЧ: количество ступеней n , противодавления ступеней P_{2j} , корневая степень реактивности R_k , корневой диаметр D_k , высоты сопловых лопаток l_{1j} , углы α_{1K} (отношение D_{cp}/l I-й ступени).

Детальный тепловой расчет

Далее для более точной оценки критериев качества создаваемой конструкции и расчета всех необходимых параметров предлагается решать обратную одномерную задачу теплового расчета ПЧ для каждой из ступеней цилиндра. Известных к этому моменту данных для проведения такого расчета не достаточно. Дополнительно требуется задание высот рабочих лопаток, геометрических характеристик решеток, уплотнений и т.д. Выбор недостающих величин должен производиться с учетом принятой конструкции, прочностных, технологических и других требований. Например, высота рабочей лопатки может быть получена на основании данных о стандартной перекрыше или благодаря строгому выполнению условия $\beta_{2K} = \text{const}$ в группе ступеней. Использование данных по атласным профилям или обобщенных зависимостей для характеристик профилей произвольной формы позволяет сформировать решетки, удовлетворяющие требованиям экономичности, надежности и технологичности. Выбор основных параметров решеток (хорда, угол установки, шаг и т.п.) целесообразно осуществлять при уточнении коэффициентов скорости венцов в задаче

одномерного обратного теплового расчета ПЧ. Это довольно сложная самостоятельная проблема, заслуживающая отдельного рассмотрения.

Результатами этого расчета являются кинематические параметры потока в зазорах, эффективные углы решеток, составляющие потерь кинетической энергии и мощностные показатели ступеней. Здесь же рассчитываются величины напряжений в элементах конструкции, массогабаритные и другие характеристики. Этой информации достаточно для того, чтобы сделать заключение о качестве созданной конструкции и о необходимости продолжения процесса проектирования.

Приближенность выбора основных параметров ПЧ на первом этапе ПП компенсируется детальным учетом большинства факторов, влияющих на показатели качества турбины в модели теплового расчета. Следует, однако, иметь в виду, что в процессе синтеза ПЧ приходится задавать ряд параметров, которые точно определяются лишь на втором этапе расчета. Поэтому возможны некоторые различия в параметрах φ , u/C_o , α_2 , $\eta_{\text{отс}}$. Особенно существенны различия между задаваемыми и уточненными значениями α_{1K} , которые могут достигать 0,5 ... 1,0 и более из-за округления числа ступеней до ближайшего целого в формуле (5.38) и, как следствие, отклонения u/C_o в формуле (5.37) от оптимального. В силу этого обстоятельства, а также ввиду методической нецелесообразности задавать в качестве исходного параметр, который в последствии должен определяться (угол α_{1K}), более рациональной представляется вторая постановка задачи ПП.

Оптимизация

Стремление максимально автоматизировать процесс ПП приводит к разработке алгоритма поиска оптимального сочетания основных параметров проточной части. Применительно к постановке П это D_K , R_K , v_K , D_{cp}/l 1-й ступени, в при отказе от унификации – еще и K_z . Общее число варьируемых переменных для цилиндра состоящего из $n_{\text{отс}}$ отсеков, таким образом, не превышает 5.

На них накладываются ограничения

$$\begin{aligned}
D_{Kmin} &\leq D_K \leq D_{Kmax}, \\
R_{Kmin} &\leq R_K \leq R_{Kmax}, \\
v_{Kmin} &\leq v_K \leq v_{Kmax}, \\
(D/l)_{min} &\leq D/l \leq (D/l)_{max}, \\
K_{zmin} &\leq K_z \leq K_{zmax}.
\end{aligned}
\tag{5.49}$$

При выборе решеток профилей на этапе детального теплового расчета могут присутствовать ограничения по статической прочности диафрагм и рабочих лопаток вида

$$\sigma \leq [\sigma], \tag{5.50}$$

конструктивные

$$\begin{aligned}
\alpha_{1K} &\geq \alpha_{1Kmin}, \\
\beta_{2H} &\geq \beta_{2Hmin}, \\
n &\geq n_{max}.
\end{aligned}
\tag{5.51}$$

и другие.

Для автоматического проектирования оптимальной в смысле выбранного критерия качества ПЧ конструктору следует задать диапазоны изменения варьируемых параметров и требуемое количество точек поиска в области пространства, определяемой условиями (5.49). Генерация пробных точек ведется с использованием ЛП-τ последовательностей. Уточнение оптимального решения достигается уменьшением диапазонов в процессе поиска. Обычно количество точек поиска колеблется от нескольких десятков до нескольких сотен. Поскольку синтез и тепловой расчет одного варианта занимает время от 1 до 10 секунд, максимальное время, затрачиваемое на поиск оптимального варианта не превышает нескольких минут на ЭВМ с быстродействием 1 млн оп/с.

5.5. Исследование и оптимизация многоступенчатых турбин с помощью планирования эксперимента

Применение методов планирования эксперимента для макро-моделирования проточных частей многоступенчатых турбин сдер-

живается сравнительно небольшим количеством факторов, вводимых в модель, в частности, в планах Бокса и Бенкена их 16. Тем не менее, в некоторых практически важных задачах планирование численного эксперимента оказывается оправданным. Остановимся на одной из них, связанной с оптимальным проектированием унифицированных проточных частей многоступенчатых турбин с известным количеством ступеней, в том числе и работающих в условиях изменяющихся режимных параметров. Под унификацией проточной части будем понимать формирование направляющих и рабочих решеток из стандартных профилей при одном и том же корневом диаметре ступеней, составляющих отсек. Задав количество сопловых и рабочих лопаток последней ступени, углы установки профилей, можно подрезкой сверху получить венцы всех остальных ступеней отсека. Углы входа и выхода, потери кинетической энергии в решетках стандартных профилей оцениваются по их характеристикам. Для вычисления длин лопаток ступеней в простейшем случае достаточно задать длины направляющих лопаток первой ступени и рабочих - последней, определив длины лопаток остальных венцов линейной интерполяцией.

В результате вектор геометрических параметров Γ многоступенчатой турбины будет включать семь компонент: корневой диаметр проточной части, высоты лопаток на входе и выходе, количество лопаток и углы установки профилей в направляющих и рабочих решетках, одинаковые для всех ступеней. При заданных режимных параметрах - давлении и энтальпии торможения на входе, противодавлении, угловой скорости вращения и т.д. - можно построить формальные макромоделли выходных параметров исходной математической модели проточной части от ряда факторов - компонент вектора Γ . Поскольку варьируются геометрические параметры турбины, исходной математической моделью служит расчет проточной части в прямой постановке. С использованием планирования численного эксперимента могут быть получены квадратичные зависимости мощности отсека, расхода рабочего тела, газодинамических или кинематических характеристик от компонент вектора Γ . Такие зависимости позволяют, во-первых, анализировать влияние геометрических параметров на характеристики проточной части, во-вторых, решать задачи оптимизации геометрических параметров турбины, базируясь на математических

моделях, намного более простых, чем исходная. Например, имея квадратичные зависимости $N_{\text{отс}} = F_1(\Gamma)$, $G = F_2(\Gamma)$, можно ставить задачу отыскания такого вектора Γ , который обеспечивал бы максимум мощности отсека при заданном заранее расходе рабочего тела G_0 , и ограничениях на диапазоны изменения геометрических параметров, связанных с особенностями макро моделирования:

$$\max_{\Gamma} F_1(\Gamma),$$

$$F_2(\Gamma) = G_0, \quad \Gamma_{\min} \leq \Gamma \leq \Gamma_{\max}.$$

Использование в качестве исходной математической модели процедуры расчета проточной части в прямой постановке позволяет решать задачу много режимной оптимизации параметров унифицированной проточной части многоступенчатой турбины. Для этого в число факторов следует дополнительно включить элементы вектора режимных параметров \mathbf{P} . К ним в общем случае относятся параметры торможения на входе в отсек, противодавление, частота вращения, расходы отборов. Необходимо только следить, чтобы суммарное количество факторов не превышало допустимого в методике планирования эксперимента. В результате макро моделирования получают квадратичные зависимости выходных параметров от геометрических и режимных факторов, в частности

$$N_{\text{отс}} = F_3(\Gamma, \mathbf{P})$$

По определению, много режимной оптимизацией проточной части называется отыскание таких геометрических параметров, которые обеспечивали бы максимум выработанной за время T механической энергии или максимум средней за этот период мощности при режимных параметрах, изменяющихся по закону $\mathbf{P}(t)$:

$$N_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T F_3(\Gamma, \mathbf{P}(t)) dt.$$

Поскольку функция F_3 — полный квадратичный полином, связывающий элементы векторов Γ , \mathbf{P} , после интегрирования, как нетрудно понять, N_{cp} будет также полным квадратичным полиномом, но только от компонент вектора Γ , с коэффициентами,

значения которых зависят от вида вектор-функции $\mathbf{P}(t)$: $N_{cp}=F_4(\Gamma)$. Отыскание максимума $F_4(\Gamma)$ в диапазоне изменения вектора Γ , где проведено макро моделирование, не вызывает принципиальных затруднений.

Удобство макро моделирования состоит в том, что квадратичная модель, полученная однажды для турбин определенного класса, может многократно использоваться при проектировании машин, предназначенных для работы в других условиях, например с другим законом изменения режимных параметров $\mathbf{P}(t)$. Возможность эффективного использования формальных макромоделей для анализа и оптимизации проточных частей многоступенчатых турбин полностью определяется их адекватностью исходной модели. Хотя проверочный расчет многоступенчатой турбины весьма трудоемок, зависимости выходных параметров от геометрических и режимных факторов оказываются настолько простыми, что могут быть с достаточной точностью представлены квадратичными моделями.

5.6. Оптимизация проточной части с учетом работы на переменных режимах

Более сложной по сравнению с задачей предварительного проектирования представляется оптимизация многоступенчатой проточной части с учетом работы на переменных режимах. Однако использование рассмотренных ранее методов оценки потерь кинетической энергии в решетках профилей позволяют конструктору достаточно просто скорректировать геометрические параметры решеток, полученные в результате предварительного проектирования, чтобы приспособить их к работе на переменном режиме с наименьшими потерями. Эта процедура включает в себя следующие этапы:

- расчет проточной части на существенно важных переменных режимах;
- выделение ступеней, решетки которых наиболее сильно страдают от нерасчетного угла натекания (последняя и околоотборные);
- построив диаграммы зависимостей потерь в рабочих решетках выбранных ступеней, скорректировать относительно

- ные шаги и (или) геометрические углы входа с целью минимизации потерь на гамме режимов;
- провести проверочный расчет и оценить эффект от модернизации.

5.6.1. Макромоделирование и оптимизация параметров турбины КТ-40/32-6,4

Рассмотрим применение описанного метода формального макромоделирования для построения обобщенных зависимостей аэродинамических характеристик от режимных параметров ЦВД турбины КТ-40/32-6,4 для Билибинской атомной электростанции.

Указанная турбоустановка предназначена для работы с повышенным отпуском теплоты в районах со значительными тепловыми нагрузками. Проточная часть турбины может работать в резко переменных режимах, в связи с чем тепловые перепады отсеков сильно изменяются. В частности, в ЦВД имеется два отбора пара: первый из них (за 7-й ступенью) питает верхний бойлер (Б3), кроме того, в бойлер Б2 подается пар из выхлопа цилиндра. Отбор за 9-и ступени невелик и составляет от 1,5 до 6,9 кг/с.

При заводском проектировании, учитывалось, что проектирование оптимальной ПЧ на одном из крайних режимов привело бы к существенному снижению экономичности на других режимах. Поэтому каждый отсек проектировался отдельно на присущие ему среднеэксплуатационные режимы, что при принятом графике теплофикационной нагрузки должно было обеспечить максимальную выработку электрической энергии.

В результате первый отсек (ступени 1-7) был спроектирован на режим, при котором отбор а Б3 составляет 25 % от максимального, а остальные ступени (8-11) - на режим, когда отбор на Б2 составляет 25% от максимального. В результате корневые диаметры 1-го и 2-го, 3-го отсеков получились разными, соответственно 850 мм и 1000 мм.

Проточная часть рассчитывалась на 4-х режимах:

1. Номинальный гарантийный конденсационный режим (К);
2. Максимальный теплофикационный режим с отбором теплоты на 3-хступенчатую теплофикационную установку (Б1+Б2+ Б3);

3. Средний теплофикационный режим с отбором теплоты 34,9 МВт (Б1 + Б2);
4. Теплофикационный режим горячего водоснабжения с отбором теплоты в количестве 5 МВт (Б1).

Указанные режимы были рассчитаны по программе прямого одномерного расчета при геометрических параметрах заводского проектирования. Они послужили основой для выбора диапазонов варьирования режимных параметров – давление за цилиндром; расходы в отборы, от которых строились обобщенные характеристики цилиндра. Поскольку расход рабочего тела на входе в цилиндр принимается на всех режимах одинаковым (59,9 кг/с), прямая задача решалась в постановке с определением давления торможения на входе в цилиндр. В результате были выбраны диапазоны изменения режимных параметров: от 0 до 18 кг/с, от 0 до 6 кг/с, от 0,2 до 0,6 МПа.

В соответствии с планом Бокса и Бенкина для 3-х факторов получены сочетания варьируемых параметров. При указанных сочетаниях проведены расчеты ПЦ в прямой постановке, в результате чего получены практически все газодинамические характеристики в осевых зазорах ступеней проточной части по среднему диаметру.

Для дальнейшего анализа были выбраны 10 характеристик цилиндра и получены коэффициенты их формальных макромоделей.

Таблица 5.1

Параметры ЦВД на переменных режимах, рассчитанные по ИММ и ФММ

	Режим 1		Режим 2		Режим 3		Режим 4	
	ИММ	ФММ	ИММ	ФММ	ИММ	ФММ	ИММ	ФММ
η_i %	79,05	79,20	64,94	64,84	75,77	75,89	76,50	76,73
p_o^* , МПа	6,334	6,334	6,182	6,193	6,291	6,289	6,290	6,295
$(u/C_o)_7$	0,555	0,553	0,378	0,386	0,522	0,528	0,528	0,534
R_7	0,210	0,212	0,102	0,107	0,192	0,193	0,195	0,198
P_{27} , МПа	1,765	1,768	1,058	1,095	1,627	1,625	1,651	1,651
$(u/C_o)_9$	0,514	0,514	0,411	0,420	0,454	0,455	0,477	0,480
R_9	0,177	0,177	0,130	0,132	0,149	0,151	0,159	0,162
P_{29} , МПа	0,988	0,993	0,490	0,493	0,810	0,812	0,862	0,867
$(u/C_o)_{11}$	0,565	0,555	0,443	0,460	0,506	0,506	0,586	0,578
R_{11}	0,199	0,166	0,152	0,121	0,176	0,173	0,110	0,109

Сравнение результатов расчета по ИММ и ФММ в точках плана показало, что среднеквадратичные отклонения аппроксима-

ционных зависимостей не велики и составляют, в частности, для к.п.д. 0,27%, давлений – 2...3 Кпа, отношения скоростей u/C_o 0,001...0,003, степеней реактивности – 0,001...0,03.

При сочетаниях параметров, соответствующих расчетным режимам 1-4, исходная и формальная модели дают результаты, приведенные в таблице 5.1.

На этих режимах значения факторов таковы:

режим 1: $\Delta G_7 = 2,6$; $\Delta G_9 = 1,5$; $P_{2n} = 0,584$;

режим 2: $\Delta G_7 = 19,6$; $\Delta G_9 = 4,9$; $P_{2n} = 0,2279$;

режим 3: $\Delta G_7 = 4,7$; $\Delta G_9 = 6,5$; $P_{2n} = 0,4337$;

режим 4: $\Delta G_7 = 4,7$; $\Delta G_9 = 6,5$; $P_{2n} = 0,5295$.

Как видно из таблицы, совпадение характеристик, рассчитанных по ИММ и ФММ в большинстве случаев хорошее несмотря на экстраполяцию за диапазон планирования эксперимента. Это позволяет заменить ИММ на ФММ в тех случаях, когда требуется большое количество вычислений, например, в задачах оптимизации. Такая ФММ может быть рекомендована для использования в качестве подмодели в задачах анализа тепловых схем турбоустановки, в частности, при анализе переменных режимов их работы.

В качестве объекта оптимизации выбраны 4 последние ступени ЦВД турбины КТ-40/32-6,4. Предполагается, что изменение режима работы происходит за счет изменения давления на выходе из проточной части, а расход одинаков на всех режимах. Отбор за 9-й ступенью принят равным нулю. В этих предположениях необходимо использовать постановку задачи проверочного расчета, в которой подгоняется давление торможения на входе в отсек.

Задача многорежимной оптимизации отсека формулируется следующим образом: найти такие постоянные для всех ступеней отсека углы, чтобы интегральная по всем режимам мощность отсека была максимальной при условии, что давление торможения на входе в отсек не превышает заданного значения на одном из выбранных режимов. Основные геометрические параметры ПЧ соответствуют заводскому варианту проектирования. Ограничение по давлению на входе в отсек берется на номинальном (кон-

денсационном) режиме на основании расчета исходного варианта. Считается, что отсек одинаковое время работает на каждом из 3-х режимов по P_{211} : 0,23 МПа, 0,6 МПа и 0,4337 МПа (номинальный режим). Решение поставленной задачи оптимизации получено с помощью описанного выше метода. На первом этапе строились режимно-геометрические ФММ мощности и давления на входе от параметров; далее производилось интегрирование квадратичных форм по времени для исключения режимного параметра; на последнем этапе отыскивался максимум мощности при ограничении на располагаемый теплоперепад на номинальном режиме с помощью ЛП-поиска. Также была решена задача выбора оптимальных параметров на конденсационном режиме, которая является частным случаем многорежимной оптимизации.

Рассмотрим полученные результаты. Исходный вариант выполнен с унифицированным облопачиванием с параметрами у корня $\alpha_{1к} = 11,49^\circ$; $\beta_{2к} = 18,16^\circ$; $\beta_{1г} = 32,1^\circ$. При этом мощность на номинальном режиме составила 9,935 МВт, а усредненная по 3-м режимам 10,02 МВт.

Характеристики ПЧ, оптимальной по 3-м режимам следующие: $\alpha_{1к} = 11,16^\circ$; $\beta_{2к} = 19,39^\circ$; $\beta_{1г} = 28,03^\circ$. Мощность на номинальном режиме 10,02 МВт, средняя по режимам – 10,05 МВт. Наконец, ПЧ, оптимальная на конденсационном режиме, имеет параметры $\alpha_{1к} = 11,22^\circ$; $\beta_{2к} = 18,8^\circ$; $\beta_{1г} = 29,32^\circ$. Мощность ее равна 10,04 МВт.

Таким образом, за счет многорежимной оптимизации удалось получить выигрыш в экономичности по сравнению с исходным вариантом 0,3%. Выигрыш от оптимизации на номинальном режиме равен 1%, что связано с тем обстоятельством, что в исходном варианте в качестве расчетного выбран режим, когда величина, отбора пара на бойлеры Б1 и Б2 составляет 50% от максимальной.

5.6.2. ЦВД турбины К-120-6,4 для ПГУ-345 ХТЗ

Рассмотрим в качестве следующего примера ЦВД турбины К-120-6,4 для ПГУ-345 Харьковского турбинного завода. В процессе модернизации было отмечено, что 3-я ступень на переменном режиме имеет существенно отличный от расчетного угол натекания на рабочую решетку. В связи с этим были изменены геомет-

рические параметры этой решетки. Рассмотрим составляющие потерь в типичной для проточной части ЦВД 3-й ступени исходного и оптимального вариантов. Диафрагмы обоих вариантов практически идентичны, поскольку составлены из профилей одного типа, и имеют одинаковый к.п.д. порядка 94%. Экономичность рабочих решеток сильно отличается: в исходном варианте $\psi^2=0,861$, а в оптимальном $\psi^2=0,886$. С чем связаны такой низкий уровень экономичности и разница в к.п.д.? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть составляющие потерь в рабочих лопатках. Оказалось, что особенно велика разница в профильных потерях (соответственно 13,2% и 9,7%), вызванная отличием поправки на удар PI (1,8 и 1,38).

Такое сильное возрастание потерь объяснимо, если учесть, что геометрические углы входа решеток равны 33° и $32,2^\circ$, а углы натекания, соответственно, $25,2^\circ$ и $24,8^\circ$. Разница в поправках связана с тем, что рабочие решетки исходного и оптимального вариантов имеют разные относительные шаги (0,701 и 0,658) и методика оценки потерь это почувствовала.

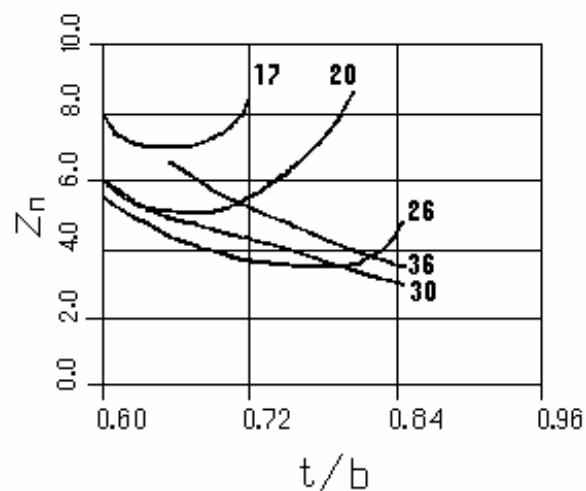


Рис. 5.8. Зависимость коэффициента потерь решетки P1 от относительного шага и угла натекания

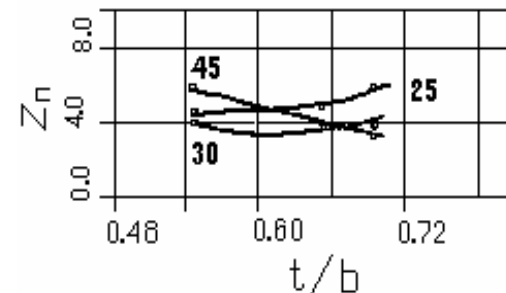


Рис. 5.9. Зависимость коэффициента потерь решетки P3 от относительного шага и угла натекания

Чтобы убедиться в том, что такой эффект имеет место в действительности, обратимся к экспериментальным данным [28]. На рис. 5.8 и 5.9 представлены зависимости коэффициентов потерь активных решеток типов P1 и P3 от относительного шага и угла натекания, из которых очевидно, что при сильно нерасчетных углах входа потока наивыгоднейший относительный шаг может очень сильно отличаться от "оптимального" при безударном натекании.

Скажем, для P1 при $\beta_1 = 25^\circ$ $t_{\text{опт}} = 0,78$, а при $\beta_1 = 20^\circ$ (удар в сторону давления всего 5°) $t_{\text{опт}} = 0,66$. Если при таком ударе принять $t = 0,78$, проиграем в экономичности более 2%.

Обобщим полученный результат, построив линии уровня к.п.д. решеток P1 и P2 от относительного шага и угла натекания при заданном эффективном угле выхода потока (рис. 5.10, 5.11). Видно, что при некоторых t/b , начиная с определенного удара в животик, имеет место катастрофическое возрастание коэффициента потерь. Уменьшая относительный шаг, переходим в область более слабой зависимости от угла атаки и тем самым повышаем экономичность решеток.

Возможен и другой вариант: использовать вместо P2 профиль с меньшим геометрическим углом входа, скажем, P1 или специально спрофилированный. К.п.д. рабочей решетки при этом повышается до 89,2% при $t = 0,701$. Согласно рис. 5.11, при $\beta_1 = 25,2^\circ$ оптимальным является относительный шаг 0,77, к.п.д. 0,897. При

этом, однако, следует иметь в виду, что при этом шаге уменьшается устойчивость к удару, что может привести к большим потерям при переменных режимах работы турбины.

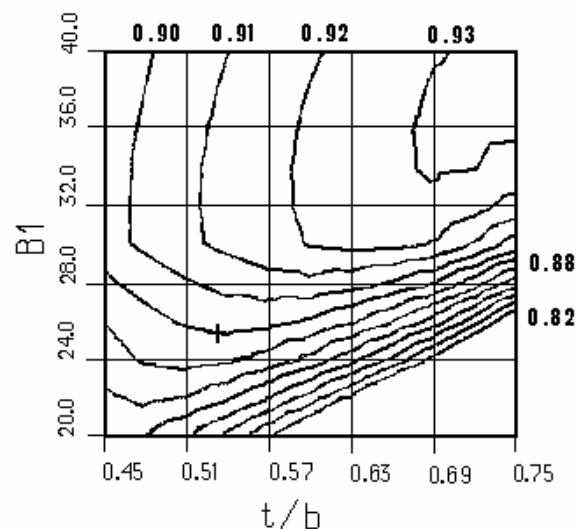


Рис. 5.10. Зависимость коэффициента полезного действия профиля P2 от относительного шага и угла натекания

Рассматриваемая проточная часть спроектирована таким образом, что даже на номинальном режиме лопаточные аппараты работают в неоптимальных условиях. Нежелательные эффекты только усугубляются при нерасчетных режимах, особенно в предотборной и последней ступенях. Существует ряд путей повышения экономичности ПЧ ЦВД с учетом работы на переменных режимах. Во-первых, можно спроектировать специальным образом те ступени, которые наиболее сильно чувствительны к изменению параметров на входе, выходе и величине отбора: увеличить теплоперепад, степень реактивности, изменить геометрический угол входа решеток и т.п. Не говоря о том, что это весьма сложная для решения оптимизационная задача, недостаток еще заключается в том, что нужно отказаться от унификации лопаточного аппарата. Другой способ состоит в увеличении хорды (переход к другому типоразмеру) либо

увеличении количества лопаток. Расчет оптимизированного варианта по обратной задаче при различном количестве рабочих лопаток дает следующие значения мощности цилиндра (Табл. 5.2). Анализ с помощью программы проверочного расчета цилиндра дает на номинальном (I) режиме результаты, несколько отличающиеся от приведенных в предыдущей таблице, за счет того, что фиксирована геометрия проточной части (Табл. 5.3). На крайнем нерасчетном режиме (III) получается еще более сильная зависимость мощности от количества рабочих лопаток (Табл. 5.4).

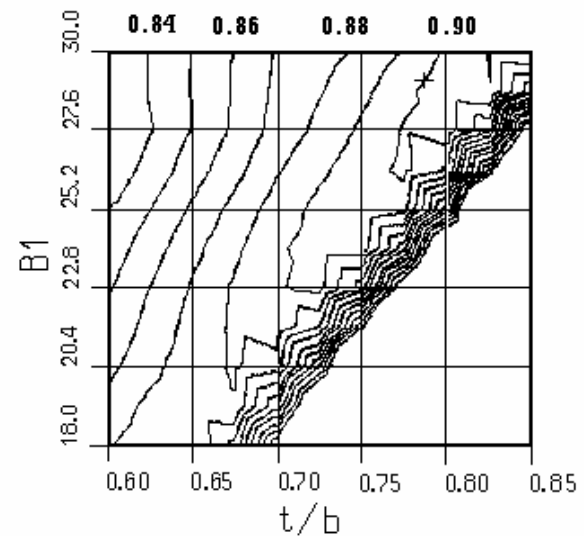


Рис. 5.11. Зависимость коэффициента полезного действия профиля P1 от относительного шага и угла натекания

Как видим, по сравнению с оптимальным на номинальном режиме вариантом при $Z_2 = 142$ получаем стабильный выигрыш в экономичности на режимах I, III порядка 0,6...1,3%, а по сравнению с исходным вариантом - 1,2...3,2%. Реальный эффект зависит от относительного времени работы ПЧ на том или ином режиме.

Был рассмотрен вариант формирования ПЧ из рабочих решеток с $\beta_1 = \beta_{1г}$ на номинальном режиме. Для этого ступени

были разбиты на 4 группы: с $\beta_{1r} = 25^\circ$ (ступени 1-4), 27° (ступени 5-8), 30° (ступени 9,10), 33° (ступени 11,12). При $Z_2 = 121$ мощности составили на режимах I и III соответственно 52,53 МВт и 54,42 МВт, а при $Z_2 = 142$ на режиме III - 54,53 МВт. Это несколько лучше, чем в предыдущем варианте, но, видимо, не окупает затрат на индивидуальное проектирование и изготовление решеток.

Предлагаемые мероприятия по повышению экономичности проточной части ЦВД турбины К-120-6,4 могут быть реализованы без существенных изменений конструкции и технологии изготовления.

Таблица 5.2

Зависимость мощности оптимального варианта от числа лопаток по обратной задаче

Z ₂	121	130	136	142
N МВт	52,14	52,25	52,26	52,25

Таблица 5.3

Зависимость мощности оптимального варианта от числа лопаток по прямой задаче (режим I)

Z ₂	121	130	142	154
N МВт	52,15	52,35	52,45	52,36

Таблица 5.4

Зависимость мощности оптимального варианта от числа лопаток по прямой задаче (режим III)

Z ₂	121	130	142	154
N МВт	53,79	54,28	54,49	54,52

ГЛАВА 6. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕШЕТОК И СТУПЕНЕЙ ТУРБОМАШИН

Существует два различных подхода к определению оптимальных параметров плоских решеток профилей для проектируемой проточной части осевой турбины.

Первый из них совершенно не учитывает форму обвода профиля, т.е. основывается на привлечении эмпирических данных по коэффициентам потерь, геометрическим и прочностным характеристикам в зависимости от важнейших безразмерных критериев (относительные высота и шаг, геометрические углы входа и выхода, числа Маха и Рейнольдса, относительная шероховатость и т.д.). Преимущества этого подхода проявляются при расчете оптимальных параметров ступеней или групп ступеней, т.к. позволяют довольно быстро и точно оценивать во взаимной связи различные факторы – аэродинамические, прочностные, технологические и прочие, влияющие на облик создаваемой конструкции, – и принимать оптимальное решение.

Второй подход предполагает строгое решение задачи определения оптимальной формы обвода профиля плоской решетки на основании моделирования ее обтекания потоком вязкой сжимаемой жидкости при варьировании граничных условий непроницаемости стенок профиля. Практически задача распадается на ряд подзадач (построение профиля из сегментов кривых определенного класса, расчет обтекания решетки потоком жидкости, расчет пограничного слоя и потерь энергии), решаемых многократно в соответствии с используемым алгоритмом оптимизации, предназначенным для поиска конфигурации профиля, которая обеспечивает экстремум выбранного критерия качества (например, коэффициента потерь) при ограничениях, связанных с прочностными, технологическими и другими факторами [2].

Выше были изложены методы расчета течения через решетки и определения составляющих потерь, пригодные для постановки и решения задач оптимизации лопаточных аппаратов как в первой, так и второй формах.

Далее мы попытаемся провести изложение алгоритмов решения в этих двух постановках с единых позиций, на которых строится персональная система автоматизированного проектирования проточной части осевых турбин АТЛАС, разработанная в 1991-1993 г. на кафедре Турбиностроения Харьковского политехнического института.

6.1. Метод оптимизации основных геометрических параметров решеток профилей

6.1.1. Постановка задачи

Важность решения задачи определения основных характеристик решеток плоских профилей видна из следующих рассуждений. Пусть проектируется ступень осевой турбины с заданной высотой лопаток. При известных параметрах перед и за ступенью обычно определяют количество лопаток и хорду профиля таким образом, чтобы при минимальных потерях энергии удовлетворялись прочностные и вибрационные требования. Простейшее решение заключается в выборе "оптимального" отношения t/b с использованием известных эмпирических зависимостей и определении хорды, обеспечивающей надежную работу. При более внимательном рассмотрении все обстоит не так просто: во-первых, оптимальное отношение t/b определяется многими факторами (относительная толщина кромки, число Рейнольдса и относительная шероховатость поверхности, относительная высота и др.); во-вторых, потери и допустимые вибрационные характеристики зависят от влияния предшествующей решетки; в-третьих, проектирование ступени может вестись как из набора стандартных профилей, так и предполагать последующее профилирование совершенно новых решеток. Учет перечисленных обстоятельств делает задачу оптимизации основных параметров решеток и довольно сложной и многообещающей в плане использования скрытых в запутанных ситуациях резервов повышения экономичности и снижения металлоемкости создаваемых конструкций турбомашин.

Расчет потерь кинетической энергии на основании эмпирических зависимостей неоднократно рассматривался ранее и, как показывает опыт, в виде, изложенном во 2-й главе, является надежным инструментом для оценки различных составляющих потерь в решетках. Расчет геометрических характеристик профилей ведется с использованием зависимостей, пригодных как для рабочих решеток, так и сопловых, в том числе и с удлиненной входной частью. Напряжения в диафрагмах, сопловых и рабочих лопатках, а также ограничения по вибрационной надежности вы-

числяются по общеизвестным и, насколько это возможно, точным зависимостям.

6.1.2. Оптимизация рабочих решеток

При оптимизации изолированной рабочей решетки рассматриваются следующие разновидности постановки задачи.

I. Способ задания профиля.

I.1. Стандартный профиль.

Геометрические характеристики определяются по табличным данным и пересчитываются под конкретную установку профиля в решетке, обеспечивающую требуемый угол выхода потока при известном относительном шаге.

I.2. "Макромодель".

Форма профиля заранее не известна, но его определяющие геометрические характеристики могут быть оценены по эмпирическим зависимостям типа [140,141].

I.3. Профилирование.

В дополнение к предыдущей постановке может строиться демонстрационный профиль, спроектированный каким-либо быстрым способом (см. гл. 2). Не исключена возможность оценки геометрических и прочностных характеристик по его конфигурации.

II. Варьируемые параметры.

II.1. Оптимизация по хорде при $t/b = \text{const}$.

II.2. Оптимизация по t/b при $b = \text{const}$.

II.3. Оптимизация и по хорде и по относительному шагу.

При построении решетки из стандартных профилей выбор хорды состоит в последовательном переборе профилей данного типа, но различного типоразмера [28,29].

III. Граничные условия.

III.1. Геометрические, кинематические и газодинамические параметры ступени в первом приближении заданы из теплового расчета.

III.2. Оптимизация решетки ведется непосредственно в процессе теплового расчета и оптимизации ступени (много-ступенчатой проточной части). В этом случае проектирование решетки встраивается в итерационный процесс вместо уточнения потерь энергии в решетках, как это обычно делается.

Оптимизация производится ЛП-поиском, а где это невозможно, прямым перебором при задаваемых диапазонах изменения варьируемых параметров и количестве пробных точек. Расчет ведется в диалоге конструктора с ПЭВМ, что существенно снижает время на поиск приемлемого решения.

Визуализация получаемых решений в окрестности проектной точки проводится путем построения линий уровня в плоскости любых двух выбранных варьируемых параметров.

6.1.3. Оптимизация сопловых решеток

Оптимизация сопловых решеток усложняется ввиду необходимости учета влияния удлинителя входной кромки. В связи с этим следует рассматривать следующие сочетания варьируемых параметров:

1. оптимизация по хорде при $t/b = \text{const}$ и отсутствии вытеснителя.
2. оптимизация по хорде и t/b в отсутствие вытеснителя.
3. оптимизация по хорде и длине вытеснителя при $t/b = \text{const}$.
4. одновременная оптимизация по хорде, относительному шагу и длине вытеснителя.

Выбор оптимальных параметров сопловых решеток несколько сложнее, чем для рабочих, но принципиально не отличается от алгоритма, изложенного в 6.1.2.

6.1.4. Совместная оптимизация сопловых и рабочих решеток

Совместная оптимизация сопловых и рабочих решеток предполагает учет влияния соплового аппарата на последующую рабочую решетку через возникновение потерь от нестационарности и ограничений по вибрационной надежности. Важнейшими факторами взаимодействия решеток являются межвенцовое расстояние, угол выхода потока из сопел, числа лопаток и др.

Ввиду того, что совместное варьирование параметров обеих решеток затруднительно, предлагается следующий эвристический метод:

- в первом приближении задается конструкция направляющего аппарата и оцениваются потери в нем;
- оптимизируется рабочая решетка, как описано выше, с учетом влияния нестационарности набегающего потока и вибрационных ограничений;
- оптимизируются параметры соплового аппарата по суммарным потерям в нем и последующей рабочей решетке.

При желании можно проделать эти расчеты неоднократно для уточнения решения, однако сходимость к оптимальному решению не очевидна.

6.2. Метода аналитического профилирования

6.2.1. Постановка задачи

Для разработки алгоритма оптимизации формы профиля плоской решетки необходим алгоритм профилирования, удовлетворяющий противоречивым требованиям быстродействия, безотказности, наглядности и высокого качества получаемых профилей.

Ранее были затрачены значительные усилия на разработку подобных алгоритмов [2, 30]. Анализируя результаты этих исследований, можно сделать следующие выводы. Во-первых, большое значение имеет правильный выбор класса базовых кривых, из которых строятся профили (а это могут быть отрезки прямых и дуги окружностей, лемнискаты, степенные полиномы, кривые Безье и др.), который прежде всего определяет надежность и наглядность решения. Качество же получаемых профилей связывается с благоприятным протеканием кривизны вдоль обводов, выбор которой ведется с помощью критериев "доминирующей кривизны", минимума максимальной кривизны и других приемов.

На наш взгляд наиболее простым и наглядным способом построения базовой кривой является кривая Безье (особенно удобная для интерактивного построения сложных кривых), однако для автоматизации профилирования с ее помощью следует предпринять специальные меры. Не вызывает также сомнения тот факт, что

минимум максимальной кривизны является необходимым условием высоких аэродинамических качеств решеток турбинных профилей. Во многих случаях, вероятно, этот критерий преобладает над условием отсутствия скачков кривизны, что подтверждается до сих пор конкурентоспособными решетками ЦКТИ [28, 29], спроектированными из дуг окружностей и отрезков прямых.

Исходя из изложенных соображений, будем строить профиль, состоящий из двух окружностей, описывающих входную и выходную кромки и трех кривых Безье, одна из которых образует сторону давления, а две другие - спинку, соответственно от выходной кромки до горла и от горла до входной кромки.

Кривую Безье, удовлетворяющую условиям:

- кривая проходит через две заданные точки;
- кривая имеет в этих точках заданные производные;

будем называть базовой кривой (БК).

6.2.2. Построение базовой кривой

Простейшей базовой кривой, удовлетворяющей указанным выше требованиям, является кривая Безье, опирающаяся на полигон, состоящий из двух отрезков, проходящих через заданные точки с заданным наклоном (Рис. 6.1).

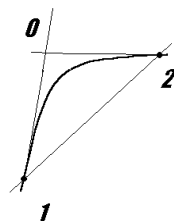


Рис. 6.1. Построение кривой Безье через 2 точки

Не трудно предположить, что использование опорного полигона из двух отрезков дает слишком "горбатые", т.е. имеющие очень большую максимальную кривизну БК. Кроме того, когда угол между отрезками стремится к нулю, максимальная кривизна неограниченно возрастает. Следующим (и решающим) шагом к улучшению базовой кривой является добавление еще одного отрезка, пересекающего первые два (рис.6.2).

Введем отношения

$$\frac{|1-3|}{|1-0|} = f, \quad \frac{|2-4|}{|2-0|} = g;$$

Протекание базовой кривой, порождаемой полигоном 1-3-4-2 значительно более плавное. Кроме того, очевидно, что должны существовать оптимальные значения параметров f и g . Действительно, при f и g , стремящихся к единице, имеем случай двух базовых отрезков и очень большую кривизну в центральной части кривой, а при f и g , стремящихся к нулю, сильно возрастает кривизна у точек 1 и 2.

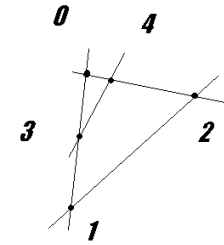


Рис. 6.2. Построение кривой Безье по трем базовым отрезкам

Оценить качество базовых кривых можно путем сравнения с кривизной дуги окружности, удовлетворяющей граничным условиям (только для симметричного случая) (Табл. 6.1). Из таблицы видно, что максимальная кривизна базовой кривой лишь в полтора раза больше кривизны дуги окружности, что свидетельствует о ее достаточно высокой гладкости. Недостатком построения базовой кривой третьего порядка является необходимость определения оптимального сочетания параметров f , g , что очень сильно замедлило бы процесс проектирования профиля. К счастью, коэффициенты можно просчитать лишь однажды и затабулировать для различных сочетаний углов и (Табл. 6.2). Поскольку оптимальные базовые кривые не зависят ни от ориентации, ни от размеров полигона, расчеты можно провести для полигона, основанием которого является единичный отрезок, лежащий на оси Ox . Кроме того, ввиду очевидного условия

$$f_{opt}(\beta_1, \beta_2) = g_{opt}(\beta_2, \beta_1),$$

достаточно хранить данные только для одного оптимального коэффициента. При наличии табличной зависимости базовые кривые достаточно высокого качества строятся практически мгновенно.

Таблица 6.1

Сравнение максимальной кривизны дуги окружности, БК 2-го и 3-го порядка ($|1-2|=1$)

угол	окружность	БК 2 порядка	БК 3 порядка
0	0,00	0,00	0,00
10	0,35	1,41	0,53
20	0,68	2,91	1,06
30	1,00	4,62	1,50
40	1,29	6,71	1,93
50	1,53	9,53	2,33
60	1,73	13,85	2,69
70	1,88	21,96	2,95
80	1,97	45,29	3,15
90	2,00	-	-

Таблица 6.2

Оптимальные коэффициенты f и g для различных углов

10	20	30	40	50	60	70	80	
0,66	0,60	0,70	0,76	0,80	0,80	0,78	0,75	10
0,95	0,65	0,45	0,50	0,54	0,56	0,56	0,55	20
0,95	0,95	0,62	0,85	0,89	0,91	0,92	0,91	30
0,95	0,95	0,40	0,58	0,69	0,72	0,72	0,69	40
0,95	0,95	0,40	0,50	0,53	0,57	0,59	0,57	50
0,95	0,95	0,30	0,40	0,45	0,48	0,49	0,46	60
0,95	0,95	0,20	0,37	0,40	0,38	0,37	0,36	70
0,95	0,35	0,25	0,31	0,33	0,31	0,27	0,20	80

6.2.3. Граничные условия и построение базового профиля

Как уже отмечалось, профиль строится из двух окружностей, образующих входную и выходную кромки, одной БК, описывающей сторону давления, и двух БК, описывающих сторону разрежения. Исходными данными для профилирования, таким образом, являются [2]:

b - хорда,

β_1 - геометрический угол входа,

$$\begin{aligned}
&\beta_2 - \text{геометрический угол выхода,} \\
&\beta_{2e} - \text{эффективный угол выхода (горло),} \\
&t/b - \text{относительный шаг,} \\
&\omega_1 - \text{угол заострения входной кромки,} \\
&\omega_2 - \text{угол заострения выходной кромки,} \\
&r_1 - \text{радиус входной кромки,} \\
&r_2 - \text{радиус выходной кромки,} \\
&\beta_y - \text{угол установки,} \\
&\delta - \text{угол отгиба выходной кромки.}
\end{aligned}
\tag{6.1}$$

Этих данных достаточно, чтобы построить опорные полигоны участков профиля. Формулы для определения координат соответствующих точек и углов ничем не отличаются от приведенных в [2]. Алгоритм построения профиля оказывается очень простым, однако он имеет существенный недостаток: в точке горла, где стыкуются две базовые кривые, возможен скачок кривизны, что может привести к локальной деформации эпюры скорости, и резкому увеличению профильных потерь. Существует простой способ гладкой стыковки БК в точке горла. Он заключается в подборе угла отгиба до совпадения кривизны участков в точке горла. Ввиду большой чувствительности кривизны от угла отгиба, вариация получается незначительной. Определение δ_{opt} производится путем решения уравнения

$$\kappa_{1G}(\delta) = \kappa_{2G}(\delta)$$

методом секущих.

Устранение скачка кривизны в горле, таким образом, требует лишь нескольких перестроений профиля и решение достигается очень быстро. Построенный таким образом профиль будем называть базовым (БП). После небольшой модификации алгоритм позволяет строить приемлемые профили с удлиненной входной частью.

Следует иметь в виду, что БП еще не является окончательным продуктом, он лишь полуфабрикат, предназначенный для оптимизации по всем остальным, кроме исходных, данным из (6.1). Эта оптимизация может производиться по разным критериям и рассматривается в следующей главе.

6.3. Разработка профилей оптимальной аэродинамической формы, удовлетворяющих прочностным и конструктивным требованиям

6.3.1. Постановка задачи

В процессе построения БП предполагались заданными параметры (6.1) за исключением угла отгиба, который подбирался таким образом, чтобы устранить скачок кривизны в точке горла. Оставшиеся десять параметров могут варьироваться с целью оптимизации некоторого выбранного критерия оптимизации профиля (решетки).

В общем виде задача оптимального проектирования плоской решетки записывается в виде [2]:

$$\min_{X \in \Omega_X} F(X), \quad (6.2)$$

Вектор варьируемых параметров X должен каким-то способом описывать форму профиля. Критерий качества $F(X)$ является функционалом от X . Ограничения на область допустимых значений вектора X связаны с накладываемыми на решетку прочностными и технологическими требованиями к последним, в частности, относятся форма и толщина входной и выходной кромок. Ввиду достаточной простоты принятого метода расчета напряжений растяжения и изгиба в сечении лопатки они могут определяться непосредственно в процессе оптимизации формы профиля. Мы, однако, будем придерживаться другого подхода, считая приближенно известными основные размеры решеток (хорда, относительный шаг, длина вытеснителя) из расчета, описанного в предыдущем разделе.

Конкретно, в вектор варьируемых параметров включены следующие характеристики, влияющие на конфигурацию профиля, который строится по методике, приведенной в предыдущем разделе:

- угол установки профиля;
- относительный шаг;
- геометрический угол выхода;
- радиус входной кромки;

- угол заострения входной кромки;
- угол заострения выходной кромки.

Ограничения на область изменения параметров \bar{X} запишем в простейшем виде:

$$\bar{X}_{min} < \bar{X} < \bar{X}_{max}. \quad (6.3)$$

При желании зафиксировать компоненту X_i просто полагаем $X_{imin} = X_{imax}$.

Наиболее важным моментом при оптимизации решетки является правильный выбор критерия качества, который в общем случае представляет собой минимум суммарных потерь кинетической энергии в решетке с учетом относительного времени ее работы на различных режимах обтекания в конкретно взятой ступени турбины. В связи с этим различают задачи многорежимной и одnoreжимной оптимизации, решение которых требует расчета обтекания решетки и составляющих потерь в ней, соответственно, на гамме режимов или на одном из них.

Как показали предыдущие исследования [2,15], в ряде случаев альтернативой аэродинамическому критерию качества может быть геометрический критерий гладкости профиля. Можно даже утверждать, что это замечание даже в большей степени относится к многорежимной оптимизации, нежели к одnoreжимной.

6.3.2. Оптимизация решетки профилей по геометрическому критерию качества

В работе [2] и ряде последующих предложена, теоретически и экспериментально обоснована методика построения профиля по критерию минимума максимальной кривизны спинки и корытца:

$$\max /k / \rightarrow \min, \quad (6.4)$$

где $k = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$ – кривизна контура профиля.

Минимум ищется отдельно для спинки и корытца.

Использовавшийся способ описания профиля с помощью отрезков степенных полиномов требовал для обеспечения критерия

(6.4) варьирования высших производных в точках сопряжения спинки и корытца с входной и выходной кромками. В связи с тем, что значения этих производных не имеют наглядного геометрического смысла, возникали трудности с подбором их начального приближения и, соответственно, время, затрачиваемое на оптимизацию, было достаточно большим. Предлагаемая оптимизация на основании базового профиля получается более быстрой, наглядной, т.к. позволяет в интерактивном режиме задавать диапазоны варьирования параметров, имеющих ясную геометрическую интерпретацию.

Кривизна в каждой точке базового профиля может быть найдена аналитически для каждого из составляющих его сегментов, являющимися либо окружностями, либо кривыми Безье. Максимум кривизны на спинке и корытце профиля находится перебором ее значений в точках профиля, количество которых по участкам можно варьировать.

Очевидно, что соотношение кривизны спинки и корытца влияет на форму межлопаточного канала, качество которого в конечном итоге и определяет аэродинамическое совершенство решетки. Поэтому целесообразно вместо критерия (6.4) использовать его обобщение

$$(a \max /k_c/ + b \max /k_k/) \rightarrow \min, \quad (6.5)$$

где a, b - весовые коэффициенты.

Удовлетворительная конфигурация канала для реактивных решеток, по нашему опыту получалась при $a=b=1$. Рекомендации по выбору весовых коэффициентов для решеток других типов могут быть выработаны на основании опыта эксплуатации программы для ПЭВМ.

Определение оптимального сочетания варьируемых параметров производится ЛП-поиском. Ввиду большей размерности вектора X (6) требуется, соответственно и большее количество точек поиска.

После проведения оптимизации необходимо построить эпюру обтекания и рассчитать потери для контроля качества решетки.

6.3.3. Оптимизация по минимуму профильных потерь

Даже самая простая из постановок аэродинамической оптимизации решетки профилей, рассматриваемая ниже, является весьма трудоемкой ввиду необходимости в каждой точке поиска рассчитывать обтекание и потери энергии в решетке. Поэтому желательно производить расчеты на ЭВМ, отличающихся высокой скоростью выполнения операций с плавающей точкой.

В качестве функции цели берется минимум профильных потерь в плоской решетке, которые определяются на основании обтекания на расчетном режиме и расчета смешанного пограничного слоя на профиле. Последовательность поиска оптимального сочетания варьируемых параметров такая же, как и для оптимизации по критерию минимума максимальной кривизны.

6.4. Примеры автоматизированного проектирования решеток профилей

Нашей целью является скорее демонстрация возможностей разработанного инструментария автоматизированного проектирования решеток осевых турбин, а не получение оптимального решения в конкретно взятом практическом случае.

Исходный вариант

Рассмотрим в качестве примера 10-ю ступень ЦВД турбины К-120-6,4 для ПГУ-345 Харьковского турбинного завода. После ввода минимальных необходимых данных для начала проектирования решеток ступени следует установить типоразмеры атласных профилей, данные о которых занесены в БД профилей: пусть это будут Н2-80 и Р2-50У. После этого проводим тепловой расчет ступени, в результате которого находятся все необходимые термодинамические параметры ступени и лопаток, достаточные для оптимального проектирования решеток (рис. 6.3) и характеристики решеток исходного варианта, определяемые по описанным ранее приближенным методикам геометрического, прочностного и экономического расчетов (рис. 6.4).

Как видим, исходное облопачивание удовлетворяет прочностным требованиям и является достаточно экономичным -

уровень относительных суммарных потерь в решетках составляет 5,15%. Эскиз исходных решеток профилей представлен на рис.6.5.

* Характеристики ступени *					
* расход ?	*	94	* ср.энтл.на вх.в ст. ?	*	2.92e+006
* ср.давл.на вх.в.ст. ?	*	1.3e+006	* ср.давл.между НА и РЛ	*	1.06e+006
* ср.давл.на вых.из ст. ?	*	1.02e+006	* степень реактивности ?	*	0.167
* температура на входе С ?	*	246	* теплоперенос на ступень	*	5.37e+004
* отношение скоростей	*	0.528	* расход через сопла	*	92.7
* расход через лопатки	*	93.1	* утечка в рад. зазор	*	0.95
* утечка у корня	*	0	* утечка диафр. уплотнения	*	1.34
* утечка разгр. отверстия	*	0	* отбор рабочего тела	*	0
* утечка с сепарацией	*	0	* коэффициент сепарации	*	0
* расх.охл.воздуха в соплах	*	0	* расх.охл.возд. в лопатках	*	0
* к-во скрепляющих проволок	*	0	* пр-к наличия сеп. камер	*	0
* пр-к наличия шлицов	*	0	* к-во сегментов сопел ?	*	1
* парциальность ?	*	1	* ср. накл. линий тока за НА*	*	0
* ср. накл. линий тока за РК*	*	0	* число сечений по высоте ?	*	1
* текущее сечение по высоте	*	0			
* Характеристики рабочей лопатки *					
* высота лопатки ?	*	0.091	* ср. диаметр р. колеса ?	*	1.1
* ср. диаметр бандажа ?	*	1.2	* толщина бандажа ?	*	0.002
* угловая скорость ?	*	314	* вязкость пара	*	3.53e-006
* число Маха по вых.отн.ск.	*	0.334	* вх. скорость в отн. движ.	*	131
* вых. скорость в отн. движ.	*	177	* число лопаток ?	*	96
* класс чистоты пов-ти ?	*	6	* число Рейнольдса по горлу	*	6.36e+005
* турбулентность потока ?	*	0.01	* показатель адиабаты ?	*	1.3
* высота лопатки на входе ?	*	0.091	* ср. диаметр РК на входе ?	*	1.1
* отношение Dcp/l	*	12.1			
* Характеристики сопловой лопатки *					
* высота лопатки ?	*	0.089	* ср. диаметр диафрагмы ?	*	1.1
* диаметр д. уплотнения ?	*	0.659	* толщина обода диафрагмы ?	*	0.05
* число Маха на вых.	*	0.554	* вязкость пара	*	3.53e-006
* вх. скорость	*	62.5	* вых. скорость	*	295
* число лопаток ?	*	37	* класс чистоты пов-ти ?	*	6
* число Рейнольдса по горлу	*	1.62e+006	* турбулентность потока ?	*	0.01
* показатель адиабаты ?	*	1.3	* высота сопла на входе ?	*	0.089
* ср.диаметр диафр.на вх. ?	*	1.1	* отношение Dcp/l	*	12.4

Рис. 6.3. Данные для проектирования решеток ступени

* _____ Характеристики сопловой решетки _____ *					
* хорда ?	*	0.12	* хорда исх. проф. ?	*	0.12
* шаг решетки ?	*	0.0911	* относительный шаг ?	*	0.758
* геом. угол вх. ?	*	91.3	* угол вх. потока	*	90
* эфф. угол вых.	*	12.2	* угол вых. потока	*	12.2
* геом. угол выхода	*	12.2	* угол отгиба вых.кромки ?	*	10
* радиус вх. кромки ?	*	0.00694	* радиус вых. кромки ?	*	0.00036
* угол заостр. вх.кромки ?	*	25	* угол заостр. вых. кромки	*	5
* отн.ширин исх.пр.и пр.с в. *	*	1	* отн.толщина вых.кромки ?	*	0.00599
* горло решетки	*	0.0193	* текущий радиус ?	*	0.551
* _____ Прочностные характеристики сопловой лопатки _____ *					
* коэффициент запаса	*	0	* номер стали лопаток д.	*	1
* плотность лопаток д.	*	7.75	* модуль упр. лопаток д.	*	1.92e+011
* к-т лин.расш. лопаток д.	*	1.07e+007	* доп. напр. в лопатках д.	*	1.84e+008
* номер стали диафрагмы	*	1	* плотность диафрагмы	*	7.75
* модуль упр. диафрагмы	*	1.92e+011	* к-т лин.расш. диафрагмы	*	1.07e+007
* доп. напр. в теле диафр.	*	1.84e+008	* объем тела и обода диаф.	*	0.0531
* объем сопловых лопаток	*	0.00797	* тах н-е в теле диафрагмы	*	3.69e+007
* тах н-е в крайней н.л.	*	6.51e+007	* н-е на вх. кромке н.л.	*	6.51e+007
* н-е на вых. кромке н.л.	*	5.12e+007			
* _____ Потери в сопловой лопатке _____ *					
* PR	*	0.847	* CR	*	3.02
* PSB	*	13.6	* MSB	*	-35.1
* DIPSCR	*	19.2	* DIPSSB	*	12.6
* DIMSSB	*	-4.36	* FI	*	-0.0305

* FI2 проф. потери пред.реш.*	0.98	* PI	*	1
* PS	44.8	* MS	*	-39.4
* MIN	2.58	* FL	*	11.9
* XPB	2.29	* PT	*	1.06
* DXPT	0.00625	* DXPM	*	0
* PIX	1	* DXPU	*	0
* XP фактор проф. потерь	2.06	* KAPA	*	0
* GM	1	* NSZ	*	1
* SHB	0	* XSB	*	0
* XS фактор втор. потерь	0.891	* XA потери в ос. зазоре	*	0
* Los квадрат. коэфф. ск.	0.971	* суммарная отн. потеря	*	0.0515
* _____ Характеристики рабочей решетки _____ *				
* хорда ?	0.0514	* шаг решетки ?	*	0.0347
* относительный шаг ?	0.674	* геом. угол вх. ?	*	30.4
* угол вх. потока	28.5	* эфф. угол вых.	*	20.4
* угол вых. потока	20.4	* геом. угол выхода	*	20.4
* угол отгиба вых. кромки ?	16	* радиус вх. кромки	*	0.00136
* радиус вых. кромки ?	0.000409	* угол заостр. вх. кромки ?	*	25
* угол заостр. вых.кромки	0	* отн. толщина вых.кромки ?	*	0.0159
* горло решетки	0.0121	* текущий радиус ?	*	0.551
* _____ Прочностные характеристики рабочей лопатки _____ *				
* коэффициент запаса	0	* номер стали лопатки	*	1
* плотность матер. лопатки	7.75	* модуль упр-ти стали лоп.	*	1.92e+011
* к-т лин. расширения лоп.	1.07e+007	* д-е н-е растяжения лоп.	*	1.84e+008
* д-е н-е изгиба лоп.	4e+007	* номер стали бандажа	*	1
* плотность матер. бандажа	7.75	* модуль упр-ти стали банд.	*	1.92e+011
* к-т лин. расширения банд.	1.07e+007	* д-е н-е растяжения банд.	*	1.84e+008
* д-е н-е изгиба банд.	4e+007	* н-е изгиба на вх. кромке	*	8.06e+006
* н-е изгиба на вых. кромке	6.91e+006	* н-е изгиба на спинке	*	-5.77e+006
* max н-е изгиба	8.06e+006	* н-е растяжения	*	4.08e+004
* центробежная сила р.ч.лоп.*	29.2	* равн. сил парового давл.	*	301
* частота колебаний вр. лоп.*	4.96e+004	* объем рабочих лопаток	*	0.00646
* отн.площадей пер. к корню	1	* отношение nZc/Fl	*	0
* _____ Потери в рабочей лопатке _____ *				
* PR	0.986	* CR	*	1.32
* PSB	-16.6	* MSB	*	-8.12
* DIPSCR	-0.0647	* DIPSSB	*	24.5
* DIMSSB	-13.4	* FI	*	0.281
* FI2 проф. потери пред.реш.*	0.971	* PI	*	1.08
* PS	7.86	* MS	*	-21.5
* MIN	-0.418	* FL	*	14.2
* XPB	3.12	* PT	*	1.11
* DXPT	0.0557	* DXPM	*	0
* PIX	1	* DXPU	*	0
* XP фактор проф. потерь	8.29	* KAPA	*	0.0556
* GM	2.22	* NSZ	*	1
* SHB	0	* XSB	*	0
* XS фактор втор. потерь	0.991	* XA потери в ос. зазоре	*	0
* Los квадрат. коэфф. ск.	0.915	* суммарная отн. потеря	*	0.0515

Рис. 6.4. Рассчитанные характеристики решеток исходного варианта

Оптимальный вариант 1

На следующем этапе по методике определения основных геометрических параметров решеток произведем выбор хорд и относительных шагов сопла и лопатки с учетом их взаимного влияния, используя для оценки геометрических и экономических параметров эмпирические зависимости [8], а прочностных – упрощенные методики [32-36]. Результаты оптимизации представлены на рис. 6.6.

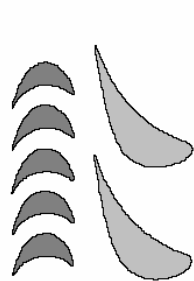


Рис. 6.5. Эскиз исходных решеток профилей 10-й ступени.

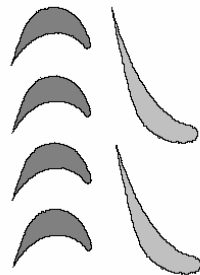


Рис. 6.6. Эскиз оптимизированных решеток профилей 10-й ступени.

Оптимальный вариант 2

Далее попытаемся составить оптимальное облопачивание из стандартных профилей типа Н2 и Р2 [28,29]. Результаты расчетов представлены на рис. 6.7. Сравнение с исходным вариантом и оптимальным с использованием произвольных профилей свидетельствует о более высокой экономичности варианта облопачивания с атласными профилями (суммарная относительная потеря 4,93%). Более

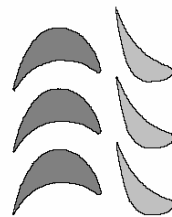


Рис. 6.7. Оптимальное облопачивание из стандартных профилей типа Н2 и Р2.

низкий уровень экономичности 1-го варианта оптимизации объясняется тем, что хорда сопловой решетки оказалась очень большой и возрос уровень вторичных потерь в ней и потерь от нестационарности в последующей решетке. Завышенный размер хорды сопла связан с особенностями оценки моментов сопротивления и других геометрических параметров по эмпирической методике [141], которые получаются ниже, чем для стандартных профилей типа Н2. Это не является ошибкой, т.к. прочностные показатели тех же атласных профилей варьируются в очень широких пределах в зависимости от типа.

В рассматриваемом случае улучшение решеток может быть достигнуто двумя путями: использованием произвольных профилей с удлиненной входной частью или комбинированием стандартных и произвольных профилей. Оставив в стороне специальный вопрос о целесообразности сопловых решеток с вытеснителем, остановимся на втором подходе.

Оптимальный вариант 3

Сопловая решетка строится из стандартных профилей типа Н2, а основные характеристики рабочей решетки определяются на основании эмпирических данных. В результате получаются решетки, представленные на рис. 6.8. Как и предполагалось, уровень суммарных относительных потерь здесь самый низкий - 4,58%, т.е. на 0,57% ниже, чем в исходном варианте.

Теперь остановимся на вопросе о профилировании решеток. Профили решеток, спроектированных по эмпирическим данным (рис. 6.6, рис 6.8) представляют собой БП, спроектированные по методике, описанной в 6.2. Их параметры из набора (6.1) получены тепловым расчетом ступени, расчетом основных размеров (b , t/b), либо оценивались по эмпирическим формулам.

Какая-либо оптимизация формы отсутствует и, как видно даже невооруженным глазом, качество решеток не высокое. Единственная цель, которая здесь преследовалась – оперативно получить представление об основных размерах и форме профилей решеток оптимизируемой ступени. Это особенно важно, как будет показано ниже, при предварительном проектировании многоступенчатых проточных частей. Для демонстрации возможностей алгоритмов оптимального профилирования возьмем в качестве образца атласные профили типа Н2 и Р2 (рис. 6.7), высокие аэродинамические качества которых общепризнаны.

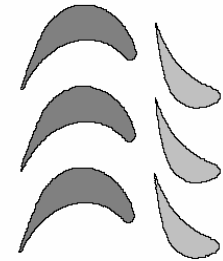


Рис. 6.8. Оптимальное облопачивание из стандартных профилей типа Н2 и рабочими решетками по эмпирическим данным..

Проектирование рабочей решетки по ММК

Решетки типа Р2 состоят из сегментов сопрягающихся окружностей, поэтому изменение кривизны по обводу профиля носит ступенчатый характер, причем корытце образовано единственной окружностью (рис. 6.9). На этом же рисунке показано изменение относительной скорости по обводу профиля, которое претерпевает заметные изломы в местах скачков кривизны. Несмотря на это экономичность решетки высокая - профильная потеря на данном режиме составляет 2,45%. Пограничный слой на корытце всюду ламинарный, а на спинке турбулизация наступает несколько раньше точки горла.

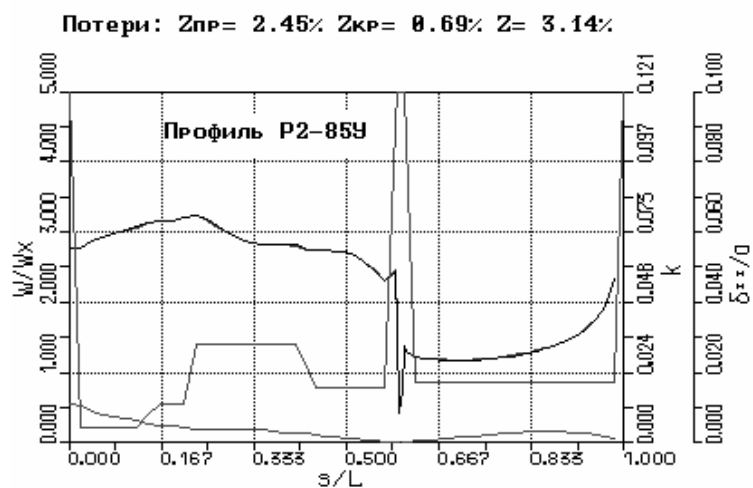


Рис. 6.9. Обтекание решетки типа Р2.

Решетка по критерию ММК на те же параметры при неизменном относительном шаге профилировалась выбором из 400 вариантов ЛП-поиском (рис. 6.10). Сравнение кривизн исходного и оптимизированного профилей свидетельствует о том, что удалось уменьшить максимальную кривизну спинки с 0,035 до 0,029, сохранить максимальную кривизну корытца примерно на том же уровне при более низкой средней кривизне.

Интересно, что кривизна нового профиля как бы сглаживает ступенчатую эпюру кривизны профиля Р2. Несмотря на лучшую гладкость потери профиля ММК на 0,5% выше, чем у атласного из-за более сильного падения скорости в районе косого среза (рис. 6.11).

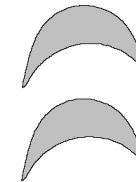


Рис. 6.10. Решетка по критерию ММК.

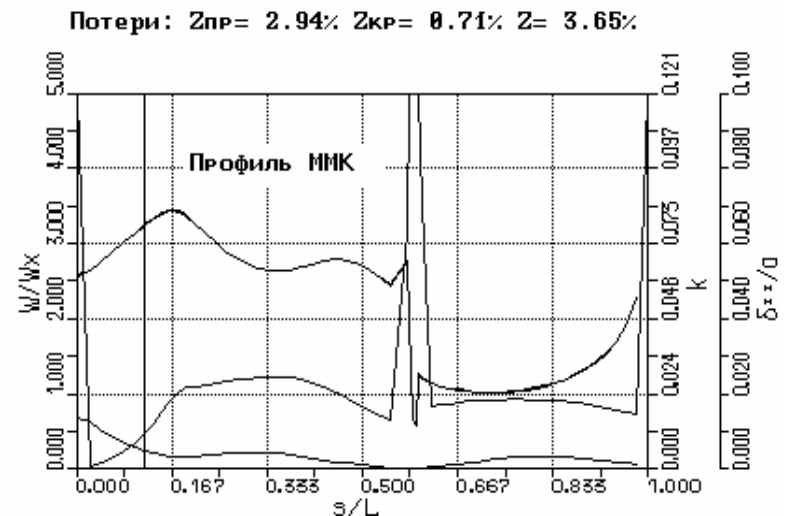


Рис. 6.11. Обтекание рабочей решетки по критерию ММК.

Проектирование сопловой решетки по ММК

Решетка Н2 также образована из сегментов окружностей. Эпюры обтекания и толщины потери импульса свидетельствуют о высоком качестве решетки – профильная потеря составляет 2.51% (рис. 6.12). Решетка ММК спрофилирована при том же t/b (рис. 6.13). Ее максимальная кривизна на спинке равна 0,03 против 0,044 у профиля Н2, а на корытце, соответственно, 0,012 против 0,013.

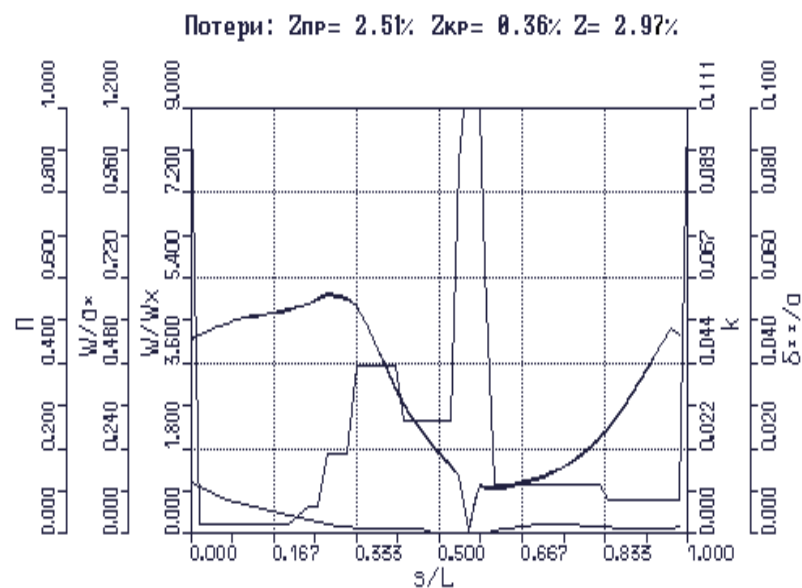


Рис. 6.12. Обтекание решетки типа H2.

Однако падение скорости на спинке в районе косого среза приводит к быстрому утолщению турбулентного пограничного слоя и уровень профильных потерь составляет 3,2% (рис.6.14). Таким образом, действительно предлагаемая методика профилирования позволяет строить очень гладкие профили, однако сам по себе критерий гладкости еще не гарантирует высоких аэродинамических показателей решеток. Поэтому можно рекомендовать профилирование по ММК только для быстрого предварительного нахождения конкурентоспособных вариантов с обязательным контролем качества обтекания и профильных потерь.

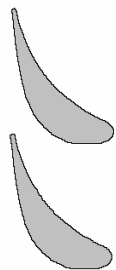


Рис. 6.13. Сопловая по критерию ММК.

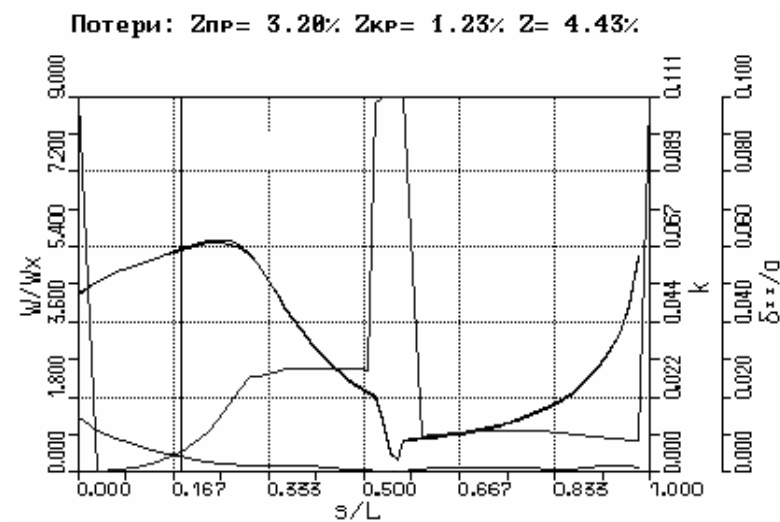


Рис. 6.14. Обтекание сопловой решетки по критерию ММК.

Проектирование рабочей решетки по МПП

Проектирование решеток по критерию МПП гораздо более сложный и длительный процесс по сравнению с ММК-оптимизацией. Поэтому целесообразно, особенно на маломощных компьютерах, сочетать алгоритм автоматического перебора вариантов с оптимизацией по ММК и ручным выбором параметров в интерактивном режиме. Надо сказать, что программа "Атлас" специально ориентирована на диалоговый режим работы, который особенно эффективен при достаточном опыте проектировщика.

Так, за несколько часов удалось спроектировать решетку (рис. 6.16) с профилем, внешне очень похожим на стандартный профиль Р2-85У (рис.6.15), но имеющим на 0,35% меньшие профильные потери. Расчет эпюры обтекания и потерь специально проводился с увеличенным до 160 количеством точек на профиле для гарантии точности. По максимуму кривизны спинки профиль МПП занимает промежуточное положение между Р2 и ММК, а максимум кривизны корытца находится на уровне ММК. Максимум кривизны спинки смещен в сторону горла, что напоминает профиль Р2, од-

нако последующее падение кривизны более резкое и быстрое. Меньшие по сравнению с P2 профильные потери можно объяснить тем, что конфузрный участок течения на спинке отодвинут к выходной кромке, из-за чего переход пограничного слоя в турбулентный наступает несколько позже и при меньшей начальной толщине.



Рис. 6.15. Стандартный профиль P2-85У.



Рис. 6.16. Рабочая решетка по МПП.

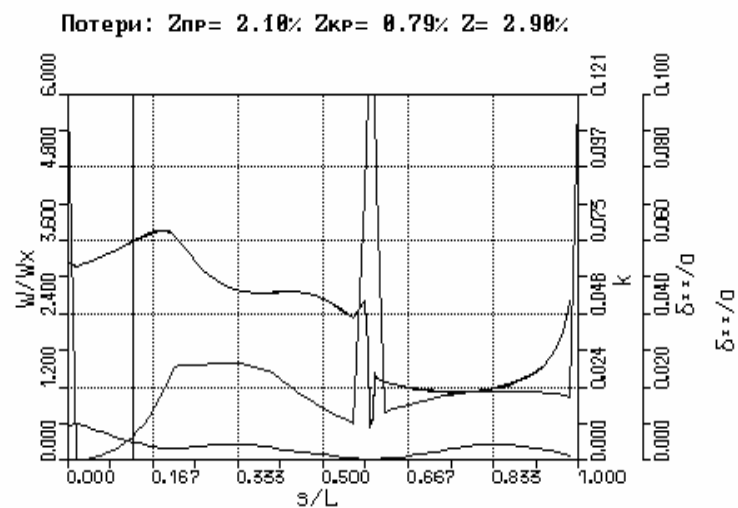


Рис. 6.17. Обтекание рабочей решетки по критерию МПП.

Итак, можно считать, что задача оптимизации решеток выбранной ступени решена: это профиль Н2-60 для сопла и решетка МПП для рабочей лопатки. Следует убедиться в том, что потери решеток соответствуют тем, которые предполагались при тепловом расчете ступени. Для сопла: в тепловом расчете принято $\xi=2,8\%$, по расчету эпюры обтекания и погранслоя $\xi=2,88\%$. Для лопатки: в тепловом расчете (без учета потерь от нестационарности) $\xi = 3,15\%$, по расчету погранслоя решетки МПП (рис.6.17) $\xi=2,90\%$, для профиля Р2 - $3,14\%$. Также хорошо согласуются и геометрические характеристики профиля Р2-85У, рассчитанные непосредственно по координатам профиля и спроектированного по МПП, рассчитанные по эмпирической методике.

6.5. Реализация метода предварительного проектирования многоступенчатой проточной части осевой турбины

6.5.1. Программная реализация и ее возможности

Методики предварительного проектирования проточных частей одно- и многоступенчатых осевых турбин, описанные в разделе 5.4, реализованы в системе АТЛАС, которая обеспечивает возможности решения следующих задач.

Одиночная ступень

- тепловой расчет;
- оптимизация основных параметров решеток совместно с тепловым расчетом ступени (оптимизация 1);
- оптимизация геометрических и газодинамических характеристик ступени с заданным облопачиванием (оптимизация 2);
- совместная оптимизация параметров решеток и ступени.

При выборе решеток профилей применяются описанные ранее методы оптимизации их основных параметров и учитываются конструктивные и прочностные ограничения, причем способы задания решеток сопловых и рабочих лопаток, критерии оптимизации, наборы варьируемых параметров и количество точек поиска могут назначаться проектировщиком по своему усмотрению. Оптимизация характеристик одиночной ступени может вестись по

критериям максимального КПД по статическим или заторможенным параметрам. Варьируются следующие параметры: $D_{\text{ср}}$, D/l , степень реактивности R , межвенцовый зазор δ_a , отношения D_1 / D_2 и l_1 / l_2 . Для отдельных элементов конструкций устанавливаются типы используемых материалов, а физико-механические параметры и допустимые напряжения определяются автоматически в зависимости от рабочей температуры.

Многоступенчатая ПЧ

- тепловой расчет;
- оптимизация основных параметров решеток совместно с тепловым расчетом проточной части (оптимизация 1);
- предварительное проектирование цилиндра по методике, описанной в предыдущем разделе (оптимизация 2);
- выбор любой из ступеней цилиндра и его оптимизация как одиночной ступени.

В задаче предварительного проектирования цилиндра для каждого из составляющих его отсеков могут варьироваться: количество ступеней, корневой диаметр, отношение D/l 1-й ступени или $\alpha_{1к}$, корневая степень реактивности, коэффициент осевой скорости. Отношение u/C_0 у корня отсека либо определяется из условия осевого выхода потока из ступеней, либо варьируется в процессе оптимизации. В последнем случае для него задаются ненулевые диапазоны изменения.

Возможности оптимизации решеток в процессе глобальной оптимизации цилиндра ограничиваются заданием общего для всех ступеней способа описания решеток. В отличие от одиночной ступени не включена совместная оптимизация параметров решеток и ступеней ввиду больших затрат машинного времени. Целесообразно интерактивное взаимодействие 1-й и 2-й задач оптимизации для получения решения в последовательных приближениях.

Программа предварительного проектирования, будучи реализованной на ПЭВМ, обеспечивает высокую степень интерактивности и наглядности получаемых результатов, позволяя оперативно получать эскизы конструкции проточной части, решеток профилей, диаграмм процессов расширения пара, треугольников скоростей.

6.5.2. Примеры расчетов

Были рассмотрены примеры оптимизации проточной части турбины К-120-6,4 для ПГУ-345 в различных постановках, некоторые из которых представлены ниже. Исходный вариант проточной части состоит из 12 унифицированных ступеней, вырабатывающих мощность 51.39 МВт. В качестве примера ступени исходного варианта взята 10-я ступень, решетки которой ранее рассматривались в примерах их проектирования.

Одиночная ступень

В начале проведена оптимизация решеток ступени, характеристики которых оценивались по эмпирическим зависимостям. КПД после оптимизации составил 87.31%, что на 0.2% выше, чем в исходном варианте (рис. 6.18). Как было показано ранее, наилучший результат при оптимизации основных параметров решеток дала комбинация из стандартной сопловой решетки типа Н2 и произвольной рабочей решетки. Результаты оптимизации таких решеток в составе ступени позволил повысить ее КПД до 88.6% (рис. 6.19).

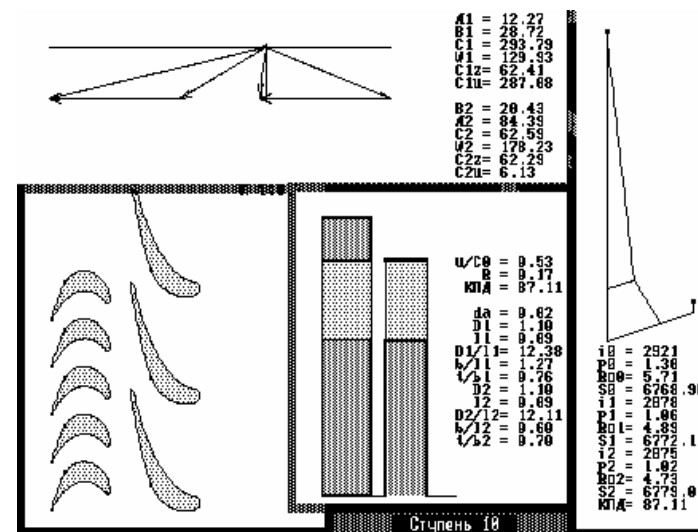


Рис. 6.18. Исходный вариант 10-й ступени.

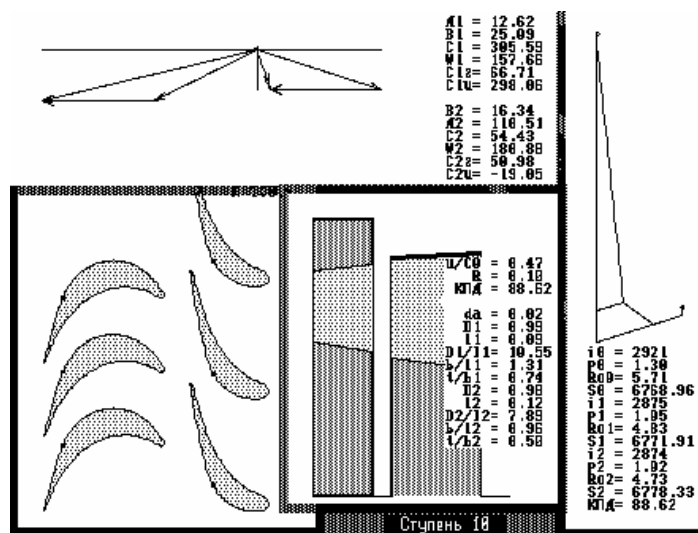


Рис. 6.19. Оптимизированный вариант 10-й ступени.

Оптимизация изолированной 10-й ступени проводилась в двух постановках: по максимуму внутреннего КПД по статическим и заторможенным параметрам. В результате оптимизации изменилась форма меридианного обвода ступени, увеличился угол выхода потока из сопла, повысилась степень конфузорности рабочей решетки и снизилась степень реактивности на среднем радиусе. Выигрыш в КПД по сравнению с исходным вариантом составил более 1,5%.

В ступени, спроектированной по минимуму КПД по заторможенным параметрам, имеют место те же изменения, что и в предыдущем варианте, однако они выражены более резко, что, в частности, приводит к существенно не осевому выходу потока из ступени.

Многоступенчатая ПЧ

Очевидно, что несмотря на эффективность оптимизации одиночной ступени, она не может быть использована для проектирования проточных частей, содержащих большое количество ступеней, т.к. очень сложно согласовать общую форму меридианного обвода цилиндра. Был рассмотрен пример оптимизации цилиндра, выбранного ранее в качестве прототипа с ограничением макси-

мального количества ступеней в нем (15). Характеристики решеток оценивались по эмпирическим зависимостям и выполнялось требование унификации проточной части. В результате получена ПЧ (рис. 6.21), состоящая из 15 ступеней, экономичность которой на 1,6% выше, чем в исходном варианте (рис. 6.20).

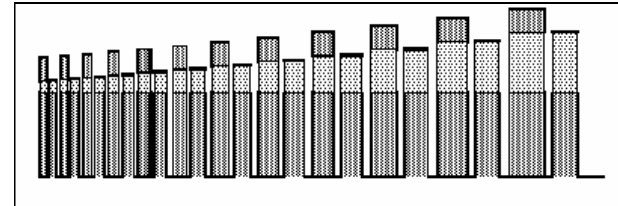


Рис. 6.20. Исходная проточная часть многоступенчатой турбины.

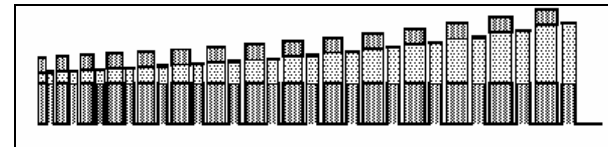


Рис. 6.21. Оптимизированная проточная часть многоступенчатой турбины.

6.6 О влиянии тангенциального навала на характеристики осевой турбинной ступени

Одним из средств управления потоком в осевой турбинной ступени является использование лопаток с не радиальными образующими. В этом случае имеет место отличный от нуля угол навала лопаточной поверхности.

Уравнение вихрей для случая течения во вращающемся венце может быть записано в виде:

- в проекции на радиальное направление:

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \beta) w_s \frac{\partial w_s}{\partial r} - w_s^2 \left(x \cos \theta + \frac{\partial \ln w_s}{\partial s} \sin \theta - \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{ctg}^2 \beta}{\partial r} \right) + 2 \omega w_s \operatorname{ctg} \beta = \frac{\partial H}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r} - F_r - f_r; \quad (6.6)$$

- в проекции на окружное направление:

$$F_u = w_s^2 \left(\frac{\sin \theta \operatorname{ctg} \beta}{r} + \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial s} + \frac{\partial \ln w_s}{\partial s} \operatorname{ctg} \beta \right) + 2\varpi w_s \sin \theta - f_u; \quad (6.7)$$

$$\text{где } \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \beta_p \cos \theta + \operatorname{tg} \delta \sin \theta; \quad (6.8)$$

$$F_r = -\operatorname{tg} \delta F_u. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.7) в (6.6) с учетом (6.8), (6.9) и пренебрегая силами трения ($f_r \approx f_u \approx 0$), приходим к следующему уравнению радиального равновесия:

$$W \frac{\partial W}{\partial r} - W_s^2 \left[x \cos \theta + \frac{\partial \ln W_s}{\partial s} \sin \theta - \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{r} + \operatorname{tg} \delta \left(\frac{\sin \theta \operatorname{ctg} \beta}{r} + \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial s} + \frac{\partial \ln w_s}{\partial s} \operatorname{ctg} \beta \right) \right] + 2\varpi W_s (\operatorname{ctg} \beta - \sin \theta \operatorname{tg} \delta) = \frac{\partial H}{\partial r} - T \frac{\partial s}{\partial r}; \quad (6.10)$$

Переходя к новой независимой переменной Ψ , - функции тока, - записываем (6.10) в окончательном виде:

$$w' = (\mu r \rho \cos \theta)^{-1} \left\{ \left[x \cos \theta + \frac{\partial \ln w_s}{\partial s} \sin \theta - \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{r} + \frac{\sin \theta \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \delta}{r} + \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial s} \operatorname{tg} \delta + \frac{\partial \ln W_s}{\partial s} \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \delta \right] \sin \beta - 2 \frac{\varpi}{w} (\operatorname{ctg} \beta - \sin \theta \operatorname{tg} \delta) \right\} + \frac{1}{w} (H' - TS'); \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) при заданных геометрических параметрах поверхности S_2' образует замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в сечении $z = \text{const}$ совместно с уравнением неразрывности:

$$r' = (\mu r \rho w_s \cos \theta)^{-1} \quad (6.12)$$

Рассмотрим расчет ступени по трем сечениям, расположенным на входной и выходной кромках направляющего аппарата и на выходной кромке рабочего колеса. Производную $\frac{\partial \ln W_s}{\partial s}$ определим из условия течения рабочего тела в свободном пространстве (справа от расчетного сечения):

$$\frac{\partial \ln w_s}{\partial s} = \frac{1}{M_s^2 - 1} \left[\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial (r \operatorname{tg} \theta)}{\partial r} - x \operatorname{tg} \theta + \frac{M_u^2}{r} \sin \theta \right]. \quad (6.13)$$

При отсутствии навала ($\operatorname{tg} \delta = 0$) уравнение (6.11) совпадает с полученным ранее. Оставляя без изменений алгоритм расчета ступени по сечениям, дополняем его заданием углов навала выходных кромок направляющих и рабочих решеток. Принимается $\delta(r) = \text{const}$.

Особый интерес представляет исследование навала в сопловых лопатках с целью оценки его влияния на градиент степени реактивности и, как следствие, величину утечки в надбандажное пространство, при различных законах закрутки направляющего аппарата $\beta(r)$.

Для определения величины $\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial s}$ среднелопаточная поверхность представляется в виде параболы $u = u(z) = az + bz^2$, что приближенно дает:

$$\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial s} \approx \frac{\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_1}{H}, \quad (6.14)$$

где H - ширина лопатки.

Расчетное исследование показывает, что навал наиболее сильно сказывается на параметрах потока в ступени как раз благодаря члену $\frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial s} \operatorname{tg} \delta$. При положительных δ происходит выравнивание градиента реактивности, причем, как видно из (6.14), тем более сильное, чем меньше угол α_1 и уже лопатка. Анализ (6.11) показывает, что выравнивание давления в зазоре благодаря обратной закрутке сопла происходит из-за появления искривления

линий тока в зазоре, т.е. это влияние косвенное и требует уточнения формы линий тока при расчете ступени.

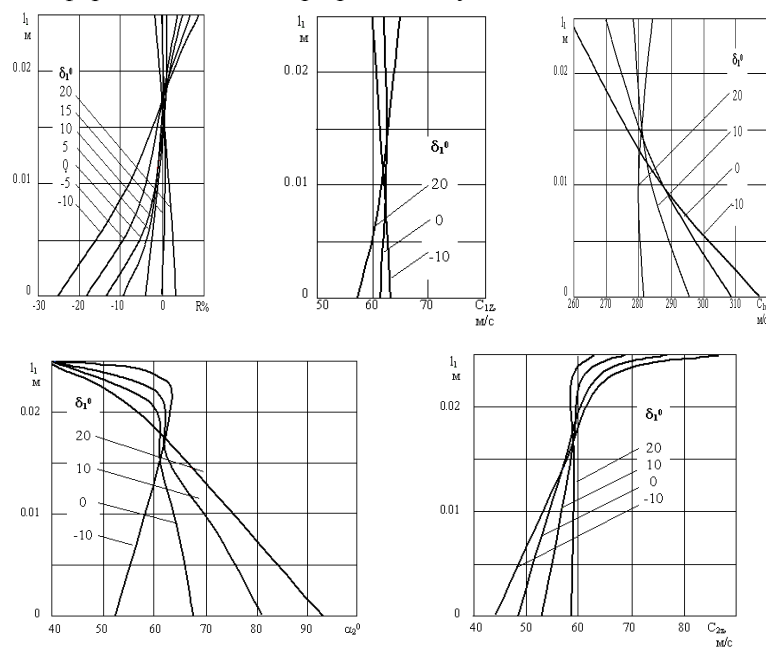


Рис 6.22. Влияние навала на характеристики ступени при $m=1$

Напротив, влияние угла навала на градиент степени реактивности в уравнении (6.11) проявляется непосредственно через кривизну средлопаточной поверхности в районе косого среза, что допускает расчет ступени даже в рамках цилиндрической теории.

Были проведены расчеты по определению влияния тангенциального навала сопловой решетки на характеристики ступени экспериментальной воздушной турбины с повышенной нагрузкой $D_{cp}/l=14$ при величине зазора над бандажем $\delta_p=1,5$ мм [142]. Закон закрутки сопловой лопатки задавался в виде

$$r_l^m \operatorname{ctg} \alpha_l = \text{const},$$

а величина угла навала варьировалась в пределах $-10^\circ \dots +20^\circ$. Результаты расчетов при $m=1$ (закон постоянства циркуляции) и

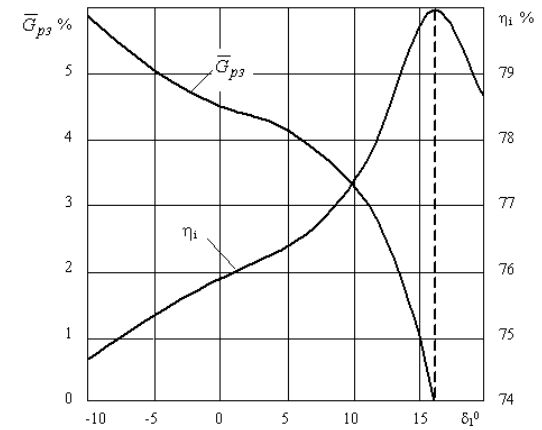


Рис 6.23. Зависимости относительного расхода в радиальный зазор и внутреннего к.п.д. от угла навала при $m=1$

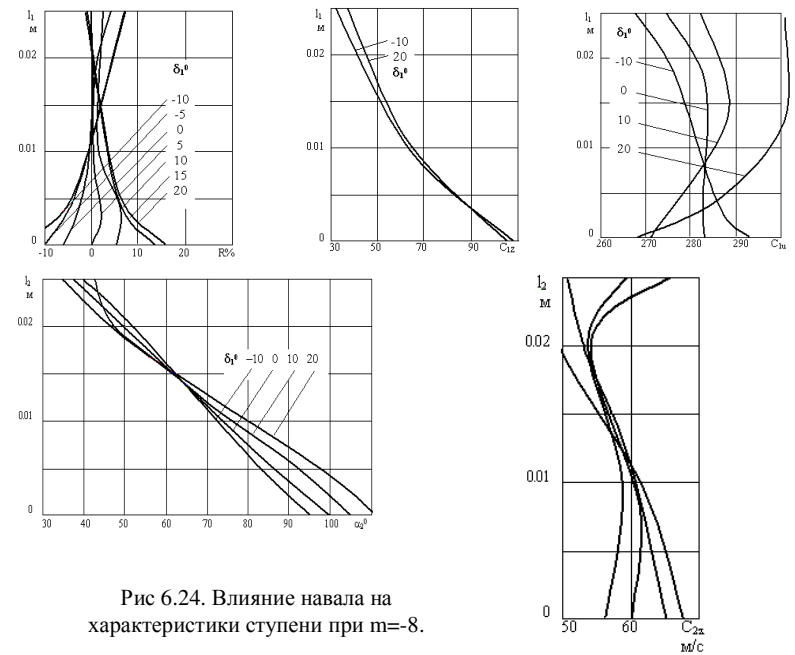


Рис 6.24. Влияние навала на характеристики ступени при $m=-8$.

$m = -8$ (обратная закрутка, оптимальная при этой величине радиального зазора при отсутствии навала) представлены на рис. 6.22, 6.23 и рис. 6.24, 6.25. Из рисунков видно, что навал является мощным средством управления потоком в ступени, дающим в ряде случаев возможность существенно повысить ее к.п.д.

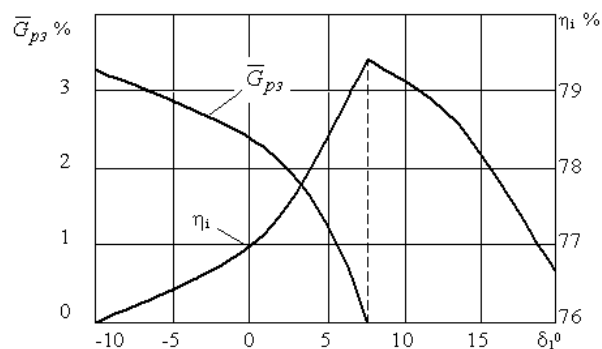


Рис 6.25. Зависимости относительного расхода в радиальный зазор и внутреннего к.п.д. от угла навала при $m = -8$;

ГЛАВА 7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ СТУПЕНЕЙ ТУРБИН

Необходимость проведения модернизации турбомашин для энергетического машиностроения не вызывает сомнения. Даже небольшое повышение КПД быстро окупает затраты на модернизацию, существенно экономя расходы на топливо. Не в последнюю очередь целесообразность модернизации определяют экологические требования.

Для обеспечения более высоких характеристик модернизируемых турбин, как показывает практика, необходимо использовать пространственное профилирование лопаточных аппаратов и проточной части в целом. Реализовать такое требование можно лишь с

привлечением последних достижений вычислительной аэродинамики (CFD) — современных методов расчета вязких трехмерных течений в турбомашинах (например, [60, 61, 117, 63, 53, 143, 144]). Только эти методы могут дать заслуживающую доверия информацию о течении в проточной части и КПД турбомшины, и ведущие разработчики турбин широко их используют. Так, на рабочем совещании-семинаре ERCOFTAC'97 [51] представителями ряда западных турбостроительных и авиационных фирм высказывалось мнение, что уже сегодня CFD – незаменимый инструмент при конструировании и модернизации турбомашин, который позволяет методом проб и ошибок выполнить доводку конструкции, полученной с помощью более простых подходов.

В то же время, при использовании методов CFD на подготовку исходных данных и обработку результата, нередко, затрачивается не меньшее время, чем на проведение расчета. Эти методы предъявляют высокие требования не только к компьютерам, но и к расчетчикам, что связано, в первую очередь, с большими объемами как исходных, так выходных данных. Ответственность при обработке такого количества информации так же возрастает, и незамеченная ошибка или незамеченная тенденция могут либо существенно замедлить процесс поиска более совершенной проточной части, либо сделать его невозможным вообще. Поэтому любой проект по конструированию или модернизации только одной ступени с использованием концепции пространственного профилирования проточной части обычно выполняется группой расчетчиков и длится несколько месяцев.

Как показывает опыт [147, 146, 147], при поиске усовершенствованной конструкции без применения математических методов оптимизации практически невозможно работать с несколькими параметрами одновременно. Поэтому обычно максимум эффективности ищется по каждому параметру отдельно, причем достижение требуемой точности этого поиска трудно осуществимо из-за необходимости проведения "вручную" достаточно большого количества весьма ресурсоемких расчетов. Очевидно, что таким способом очень сложно добиться сколько-нибудь серьезных результатов.

Исходя из сказанного выше, можно сделать вывод о необходимости решения задачи об оптимальном пространственном профи-

лировании проточной части ступени турбины (а в будущем и многоступенчатой турбомашины в целом) на основе математической модели вязкого трехмерного течения. Это, во-первых, позволит получать более надежные результаты и, во-вторых, автоматизирует процесс поиска "оптимальной" конструкции, снизив вероятность фатальных ошибок и высвободив расчетчиков для решения других задач. Анализ современного состояния проблемы показывает, что такая задача в той или иной постановке привлекает сегодня большое внимание исследователей и конструкторов [148, 149, 150, 151, 152]. В настоящей главе представлены результаты, полученные с помощью метода, впервые предложенного в работе [153].

7.1. Постановка задачи об оптимальном пространственном профилировании ступеней турбин

Рассмотрим задачу оптимального пространственного профилирования аэродинамических поверхностей лопаточных аппаратов турбинной ступени, которую сформулируем следующим образом: найти

$$\max_g f(\mathbf{r}(\mathbf{g}), \mathbf{g}),$$

при ограничениях $\mathbf{r} \in [\mathbf{r}_{min}; \mathbf{r}_{max}]$; $\mathbf{g} \in [\mathbf{g}_{min}; \mathbf{g}_{max}]$; $O_r(\mathbf{r}) = 0$; $O_g(\mathbf{g}) = 0$, где f — целевая функция; \mathbf{r} — вектор режимных параметров; \mathbf{g} — вектор управляющих геометрических параметров.

Главная особенность рассматриваемого подхода заключается в том, что целевая функция f определяется с привлечением солвера комплекса программ **FlowER**, реализующего современный численный метод расчета вязкого трехмерного течения в ступени турбины. Подробное описание постановки аэродинамической задачи и численного метода приведено в главе 3.

В качестве целевой функции могут быть выбраны или момент на рабочих лопатках (как правило, если рассматривается невязкое течение), или КПД ступени, рассчитанный либо по моменту на рабочем колесе, либо по потерям кинетической энергии. Потери кинетической энергии могут рассматриваться как с учетом потерь с выходной скоростью, так и без их учета.

Основные управляющие (оптимизируемые) геометрические параметры g для каждого лопаточного аппарата следующие:

- количество лопаток;
- корневой угол установки лопаток;
- угол закрутки лопаток (линейное распределение по радиусу относительно угла установки);
- осевой и окружной навалы лопаток;
- 8 параметров, при помощи которых параметризуется кусочно-квадратичной функцией осевая и окружная саблевидности лопатки.

В ближайшем будущем предполагается дополнить постановку задачи следующими оптимизируемыми параметрами

- радиальный зазор;
- осевой зазор;
- параметры, определяющие форму ограничивающих меридиональных обводов;
- параметры, определяющие форму профилей лопаток.

Для каждого из геометрических параметров выставляются ограничения — задаётся область допустимого изменения как отрезок на вещественной оси $(g_{min}; g_{max})$. Неизменность режима обтекания обеспечивается с помощью ограничения на массовый расход M рабочего тела через ступень, которое может быть как ограничением типа равенства O_r (строгое соблюдение расхода), так и ограничением типа неравенства $M_{min} < M < M_{max}$ (расход может варьироваться в заданных пределах). Кроме того, могут использоваться дополнительные режимные ограничения на минимальную и среднюю степень реактивности по длине лопатки, а также на средний абсолютный угол выхода потока из рабочего колеса. Задание режимных ограничений должно позволить расчетчику не только модернизировать существующие ступени, но и разрабатывать новые, используя в качестве базовых ступени, работающие при других условиях обтекания.

Очевидно, что произвольная комбинация управляющих геометрических параметров, выбранных даже в пределах их допустимого изменения, может не иметь инженерного смысла, и соответственно, расчет вязкого трехмерного течения для такой комби-

нации параметров будет невозможен. С целью исключения из рассмотрения таких ситуаций в настоящей работе дополнительно используются специальные геометрические ограничения. Учет всех ограничений осуществляется при помощи штрафных функций различных типов (внешних или внутренних).

Тот факт, что для двух параметров (количество лопаток статора и ротора) допустимы только натуральные значения, вносит определенные усложнения в постановку задачи и требует особого контроля над процессом оптимизации со стороны расчетчика.

Для решения поставленной задачи оптимизации КПД турбинной ступени с рассмотренными ограничениями целесообразно использовать методы поиска, не требующие вычисления градиентов или субградиентов целевой функции. Такой выбор объясняется отсутствием необходимой для обоснования применимости градиентных методов информации о гладкости целевой функции. В настоящей работе применяются "квазиглобальные" методы прямого поиска Хука–Дживса [133] и деформируемого многогранника Нелдера–Мида [136]. Последний метод, наверное, самый популярный в настоящее время, неплохо зарекомендовал себя при решении практических задач оптимизации для целевых функций, обладающих сложным рельефом и характеризующихся сравнительно высокой трудоёмкостью вычислений, поэтому ему в настоящей работе отдается предпочтение. Тем не менее, как уже отмечалось, этому методу присущи серьезные недостатки, в первую очередь плохая сходимость при увеличении количества оптимизируемых параметров. Поэтому ближайшем будущем планируется использовать в качестве методов оптимизации современные методы поиска, в частности

- метод прямого поиска по шаблону, предложенный Торзсон [154];
- генетические алгоритмы [155].

Для обоих этих методов доказаны соответствующие теоремы о сходимости процесса оптимизации. Метод прямого поиска по шаблону является развитием симплекс–метода и метода Нелдера–Мида и сочетает в себе многие их достоинства. Главный недостаток метода состоит в том, что количество вычислений пропорционально размерности задачи оптимизации. Генетические алго-

ритмы, моделирующие эволюционный процесс для поиска оптимума целевой функции, представляют собой перспективное направление при решении задач глобальной оптимизации.

7.2. Программная реализация. Комплекс программ *Optimus*.

Предложенные постановка задачи и метод оптимизации реализованы в программном комплексе *Optimus*. Основные программные единицы комплекса написаны на объектно-ориентированном языке программирования Java, за исключением модулей комплекса *FlowER*, отвечающих за расчет трехмерного вязкого течения и написанных на стандарте Fortran-77. Такая организация программного продукта обеспечивает возможность его работы для различных операционных систем (Windows, UNIX и т.д.) и вычислительных платформ (Intel, Alfa, SGI, HP и т.д.), и, кроме того, позволит в будущем относительно просто организовать распараллеливание вычислений между компьютерами в локальной сети и процессорами этих компьютеров. При этом быстродействие программного продукта оказывается высоким, так как основные вычислительные операции обрабатываются эффективным компилятором языка Fortran-77, а интерпретатор языка Java работает преимущественно с командами, управляющими процессом оптимизации.

Комплекс программ *Optimus* снабжен удобным интерфейсом, позволяющим в короткие сроки подготовить исходные данные: назначить целевую функцию и варьируемые геометрические параметры, задать ограничения, выбрать метод оптимизации и запустить подготовленное исследование на счет. Дальнейшая работа комплекса программ осуществляется в автоматическом режиме, что, однако, не исключает возможности для расчетчика как следить за исполняемым исследованием, так и, при необходимости, вмешаться в процесс оптимизации.

Структура комплекса программ *Optimus* и схема его взаимодействия с комплексом *FlowER*, показаны на рис. 7.1. Предполагается, что для выполнения оптимизации ступени турбины необходимо задать исходный прототип ступени – базовую конструкцию, которая должна быть улучшена. Геометрия этой ступени вносится в базу данных комплекса программ *FlowER*. Метод оптимизации комплекса *Optimus* предлагает изменения геометрии

рассматриваемой ступени, которые заносятся в базу данных комплекса программ **FlowER**. Модули комплекса программ **FlowER**, работающие под управлением оболочки комплекса программ **Optimus**, выполняют последовательно следующие действия:

- проверка модернизированной конструкции с точки зрения инженерного смысла;
- построение разностной сетки и расчет ее геометрических характеристик;
- расчет начального приближения;
- газодинамический расчет;
- обработка результатов газодинамического расчета (определение целевой функции и режимных параметров).

На этапах построения сетки и газодинамического расчета выполняется отслеживание ошибок и сбойных ситуаций, их классификация. Так как метод и алгоритм комплекса программ **FlowER** характеризуется высокой надежностью получения решения, в том числе для существенно нерасчетных режимов обтекания и неоптимальных разностных сеток, то в большинстве случаев, ошибки и сбои можно считать следствием недопустимости полученной конструкции. Поэтому в таких случаях, дальнейшее выполнение газодинамического расчета прекращается и данная конструкция исключается из процесса оптимизации. Конечно же, существует возможность, что таким образом будет отбракована допустимая конструкция с высокими характеристиками. Если это произойдет из-за случайного единичного сбоя, то достаточно велика вероятность, что метод оптимизации сможет вернуться к рассмотрению ошибочно исключенной конструкции через несколько итераций. Если же ошибка или сбой являются систематическими, то утешением может служить то соображение, что оценка эффективности рассматриваемой конструкции средствами современной вычислительной аэродинамики оказывается невозможной, а значит, такая конструкция не подлежит рассмотрению.

Далее значения целевой функции и режимных параметров передаются в базу данных комплекса программ **Optimus**, выполняется учет ограничений с помощью штрафных функций. Затем, на основании анализа полученных результатов, метод оптимизации

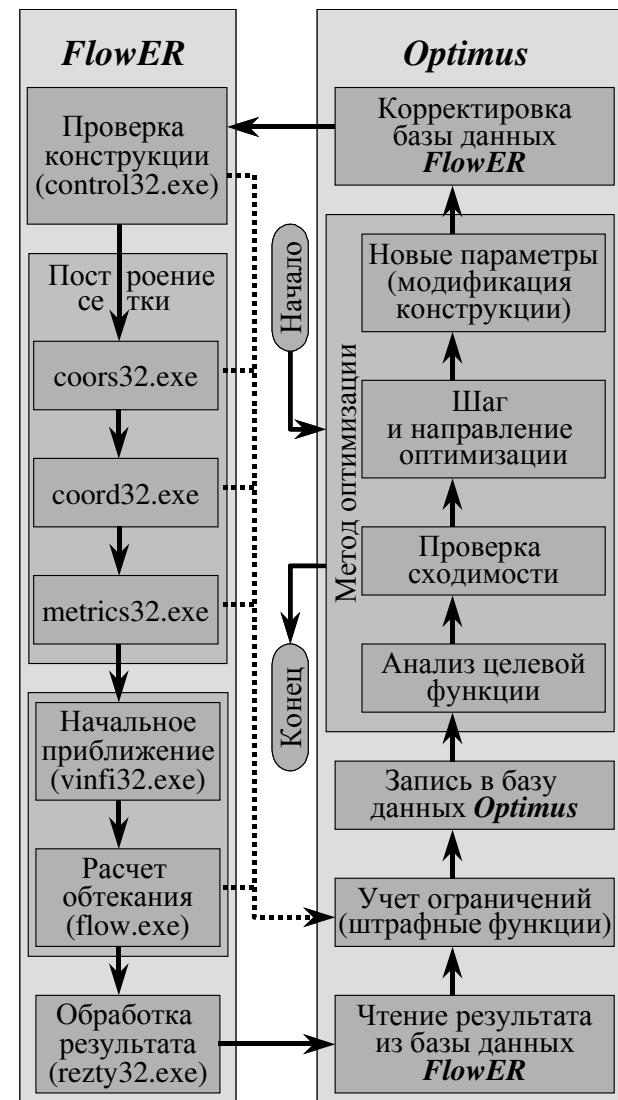


Рис. 7.1. Структура комплекса программ **Optimus**

предлагает новое изменение геометрии ступени и цикл повторяется. По достижению сходимости процесса оптимизации осуществляется остановка исследования. На основании достаточно большого количества решенных оптимизационных задач, можно утверждать, что разработанный алгоритм хорошо зарекомендовал себя и в большинстве случаев позволяет ощутимо улучшить первоначальную конструкцию ступени турбины.

7.3. Примеры оптимального пространственного профилирования турбинных ступеней

С помощью разработанного программного комплекса выполнена модернизация нескольких турбинных ступеней. Во всех случаях оптимизация проводилась на грубой сетке $2 \times 32 \times 28 \times 56$ (100352 ячейки в ступени), а затем выполнялись проверочные расчеты на сетке $2 \times 56 \times 56 \times 88$ (551936 ячеек в ступени).

Оптимизация ступени 1 выполнялась методом Нелдера–Мида по восьми параметрам: количество лопаток статора и ротора; углы установки статора и ротора; 4 параметра, определяющих окружную саблевидность лопаток статора.

После 68 итераций оптимизационного процесса (130 расчетов обтекания) числа лопаток статора и ротора перестали изменяться. Симплекс к этому моменту выполнил несколько операций редукции, его размер в направлениях этих двух параметров стал значительно меньше единицы, и дальнейшее продолжение процесса оптимизации потеряло смысл.

Увеличение КПД модифицированной ступени по сравнению с исходной составило приблизительно 4,3 %, однако, данное число не

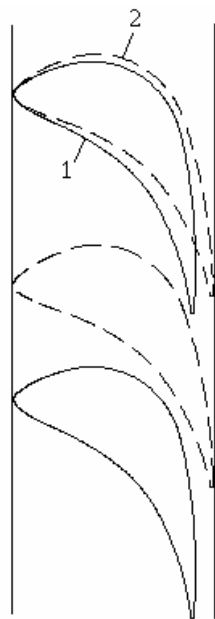


Рис. 7.2. Решетка статора ступени 1: 1 – исходная; 2 – модифицированная

может быть показательным, так как исходная ступень, как уже отмечалось, спроектирована с грубыми ошибками. Применяемые в настоящей работе методы оптимизации позволяют найти только локальные максимумы эффективности, поэтому полученную в результате оптимизации конструкцию, по-видимому, можно улучшить. Однако, нет уверенности, что это можно сделать, используя в качестве начальной точки рассматриваемую исходную ступень 1 и тот же набор варьируемых параметров. Более того, шансы получения в результате оптимизации высокоэффективной конструкции, надо полагать, будут выше, если исходная ступень будет иметь достаточно большой КПД.

Таблица 7.1

Характеристики ступени 1

Параметр	Ступень:		Модернизированная	
	Статор	Ротор	Статор	Ротор
Относительная длина лопатки l/b	0,62	1,48	0,62	1,48
Относительный шаг решетки t/b	1,17	0,77	0,73	0,88
Вeerность решетки D/l	22,9	20,9	22,9	20,9
Эффективный угол выхода $\sin^{-1}(a/t)$, град	17,8	18,6	10,2	14,0
Количество лопаток	40	132	64	115
Угол установки, град	39	73	44,3	66,8
Угол закрутки, град	0	0	0	0
Угол окружного навала, град	0	0	0	0
Саблевидность	нет	нет	да	нет
Полное давление на входе, Па	605840		605840	
Давление на выходе, Па	547000		547000	
Полная температура на входе, К	716,76		716,76	
Расход, кг/с	51,85		51,63	
Реактивность	0,1499		0,1806	
КПД с учетом выходной скорости	0,8064		0,8496	

Вторая ступень, геометрические и режимные характеристики которой приведены в таблице 2, тоже представляла собой ступень турбины высокого давления. Исходная конструкция второй ступени разработана также с помощью традиционных одномерных и

двухмерных методик профилирования. Однако на этапе ее доводки для проверочных расчетов привлекался комплекс программ **FlowER**, что позволило применить саблевидные лопатки в направляющей решетке ступени и достичь достаточно высокого КПД.

Оптимизация ступени 2 выполнялась методом Нелдера–Мида по пяти параметрам: угол окружного навала статора; углы установки статора и ротора; углы закрутки статора и ротора. Форма саблевидных лопаток статора сохранялась неизменной.

Таблица 7.2

Характеристики ступени 2

Параметр	Ступень:		Модернизированная	
	Статор	Ротор	Статор	Ротор
Относительная длина лопатки l/b	0,84	2,17	0,84	2,17
Относительный шаг решетки t/b	0,70	0,79	0,70	0,79
Веерность решетки D/l	13,4	12,6	13,4	12,6
Эффективный угол выхода $\sin^{-1}(a/t)$, град	11,9	17,1	12,3	16,2
Количество лопаток	54	118	54	118
Угол установки, град	47,2	70,5	47,7	69,6
Угол закрутки, град	0	0	0,6	-0,4
Угол окружного навала, град	0	0	1,3	0
Саблевидность	да	нет	да	нет
Полное давление на входе, Па	793500		793500	
Давление на выходе, Па	711600		711600	
Полная температура на входе, К	761,4		761,4	
Расход, кг/с	203,2		202,1	
Реактивность	0,2678		0,3495	
КПД с учетом выходной скорости	0,9075		0,9155	

Процесс оптимизации сошелся с заданной точностью за 107 итераций (182 расчета обтекания). Трансформация многогранника в проекции на плоскость изменения параметров (угол навала статора – угол установки ротора) дана на рис. 7.3. Как видно из

таблицы 2, полученные в результате оптимизации новые значения геометрических параметров близки к исходным, отличия составляют $0,4^\circ - 1,3^\circ$. Это означает, что первоначальная конструкция действительно выбрана удачно. Однако, тем не менее, КПД оптимизированной ступени оказался на 0,8 % выше.

На рис. 7.4 приведены распределения потерь ζ по относительной длине лопаток l для исходной и модифицированной ступеней. Распределения безразмерной абсолютной скорости c_2 за ступенью даны на рис. 7.5. Основным выигрыш КПД произошел за счет снижения потерь с выходной скоростью, при незначительном увеличении профильных потерь.

Третья ступень, геометрические и режимные характеристики которой приведены в таблице 3, представляла собой последнюю ступень турбины низкого давления. Исходная форма лопаток ступени показана на рис. 7.6. Оптимизация выполнялась на номинальном режиме обтекания. Расчет течения в ступени осуществлялся с учетом перетекания рабочего тела в радиальном зазоре рабочего колеса.

При оптимизации данной ступени рассматривались два подхода: применение простых навалов лопаток статора и применение саблевидных лопаток статора. В первом случае оптимизация выполнялась по шести параметрам: углы осевого и окружного навала статора; углы установки статора и ротора; углы закрутки статора и ротора.

Процесс оптимизации сошелся с заданной точностью за 105 итераций (183 расчета обтекания). Как видно из таблицы 3, увеличение КПД для модернизированной ступени с навалом лопаток

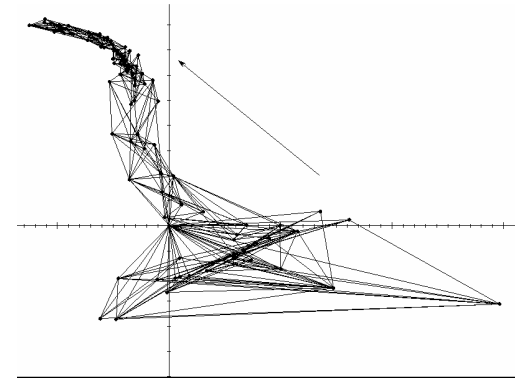


Рис. 7.3. Трансформация многогранника в проекции на плоскость изменения параметров ступени 2: угол навала статора – угол установки ротора

статора составило примерно 0,8 % на номинальном режиме. Изменение характеристик течения в этом случае произошло в первую очередь за счет увеличения степени реактивности ступени и ее перераспределения по радиусу (рис. 7.7). В исходной ступени в корневых сечениях наблюдалась отрицательная реактивность, что приводило к перерасгону потока в направляющем аппарате и на

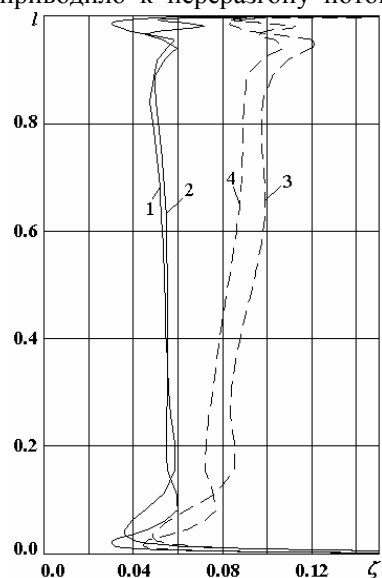


Рис. 7.4. Потери кинетической энергии без учета (1,2) и с учетом (3,4) выходной скорости по высоте исходной (1,3) и модифицированной (2,4) ступени 2

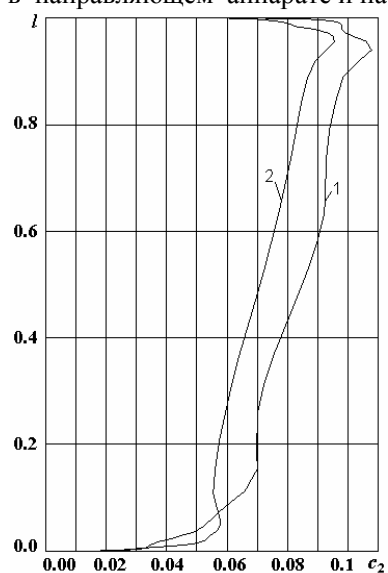


Рис. 7.5. Абсолютная выходная скорость по высоте исходной (1) и модифицированной (2) ступени 2

входной кромке ротора. В результате, вблизи входной кромки рабочего колеса возникал скачок уплотнения, который провоцировал отрыв пограничного слоя на стороне разрежения ниже по потоку, как это видно на рис. 7.8. Течение в прикорневых сечениях ротора было диффузорным. В модернизированной ступени с навалом лопаток статора реактивность у корня была существенно повышена. Как видно на рис. 7.8., течение в прикорневых сечениях ротора стало конфузорным с замыкающим скачком уплотнения в косом срезе, а отрыв на выпуклой стороне практически полностью исчез.

Таблица 7.3

Характеристики ступени 3

Ступень: Параметр	Исходная		Прямая		Саблевидная	
	Статор	Ротор	Статор	Ротор	Статор	Ротор
Относительная длина l/b	3,9	5,2	3,9	5,2	3,9	5,2
Относительный шаг t/b	0,8	0,91	0,8	0,91	0,8	0,91
Веерность решетки D/l	3,4	2,8	3,4	2,8	3,4	2,8
Эффективный угол выхода $\sin^{-1}(a/t)$, град	18,4	26,8	18,2	25,8	18,4	25,3
Количество лопаток	52	51	52	51	52	51
Угол установки, град	42,4	39,3	42,6	40,4	42,9	41,1
Угол закрутки, град	11	54,2	7,3	56,8	11	54,2
Угол осевого навала, град	0	0	-1,7	0	-6	0
Угол окружного навала, град	0	0	-11,1	0	0	0
Саблевидность	нет	нет	нет	нет	да	нет
Полное давление на входе, Па	29308		29308		29308	
Давление на выходе, Па	10000		10000		10000	
Полная температура на входе, К	341,4		341,4		341,4	
Расход, кг/с	56,27		56,13		56,33	
Реактивность	0,2816		0,3435		0,3495	
КПД с учетом выходной скорости	0,813		0,8213		0,8246	

Во втором случае оптимизация выполнялась по семи параметрам: угол осевого навала статора; 2 параметра осевой саблевидности статора на периферии; 2 параметра окружной саблевидности статора у корня; углы установки статора и ротора.

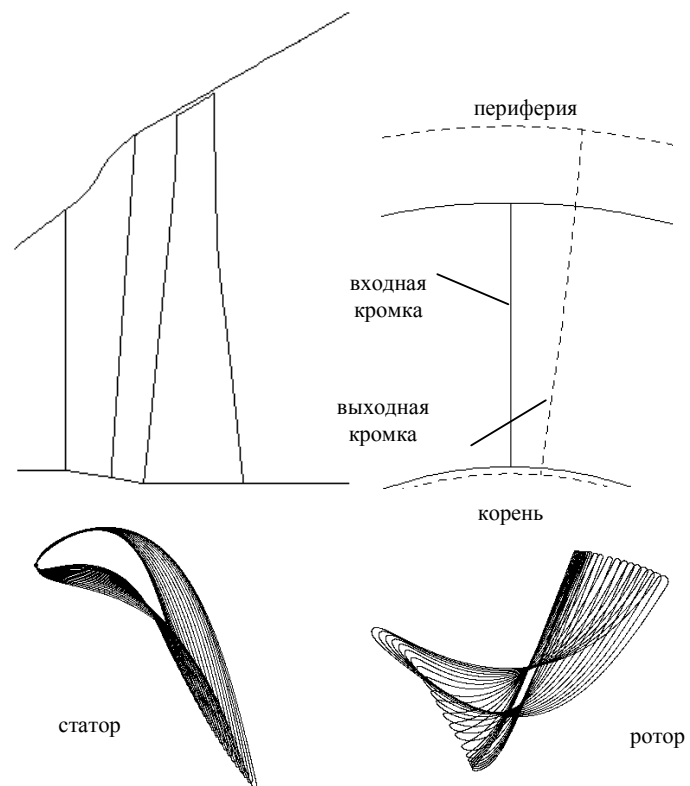


Рис. 7.6. Исходная ступень

Процесс оптимизации сошелся с заданной точностью за 119 итераций (215 расчетов обтекания). Форма лопаток модернизированной ступени показана на рис. 7.9. Характеристики модернизированных ступеней с саблевидными и наваленными лопатками статора оказались во многом достаточно близкими. Как видно из таблицы 3, увеличение КПД для модернизированной ступени с саблевидными лопатками статора составило почти 1,2 % на номинальном режиме. На рис. 7.10 показана зависимость КПД от массового расхода через ступень для исходной и модернизированных форм лопаток. Ступень с саблевидными лопатками ста-

тора более эффективна на номинальном режиме и на режимах повышенной нагрузки, в то время как ступень с навалом лопаток статора имеет более высокий КПД на частичных режимах. При этом на режиме с массовым расходом 26 кг/с выигрыш по КПД для ступени с саблевидными лопатками статора составил 10,9 %, а для ступени с навалом лопаток статора – 14,3 %.

Поиск эффективных форм лопаточных аппаратов рассматриваемой последней ступени турбины может быть продолжен и на режимах с пониженной нагрузкой. По-видимому, именно после проведения оптимизации на частичных режимах возможны окончательные выводы по модернизации и выбор рациональной формы лопаток.

Рассмотрим результаты модернизации ступени газовой турбины, геометрические и режимные характеристики которой даны в таблице 4.

Оптимизация выполнялась методом Нелдера—Мида по шести параметрам: углы

окружного и осевого навала статора; углы установки статора и ротора; углы закрутки статора и ротора. Процесс оптимизации сошелся с заданной точностью после 72 итераций (135 расчетов обтекания).

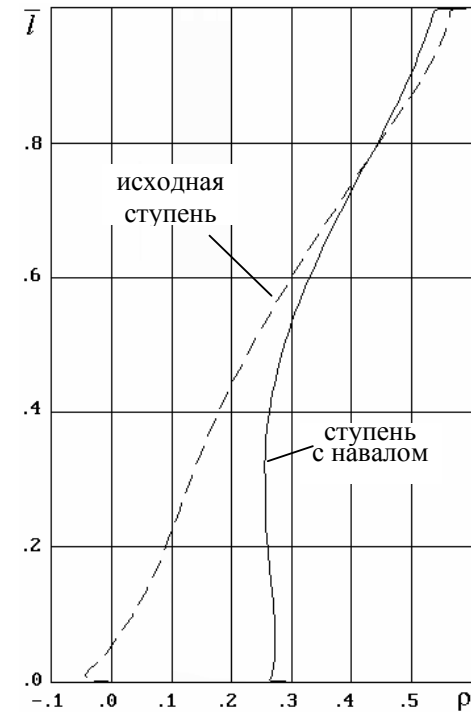


Рис. 7.7. Распределение реактивности по длине лопатки

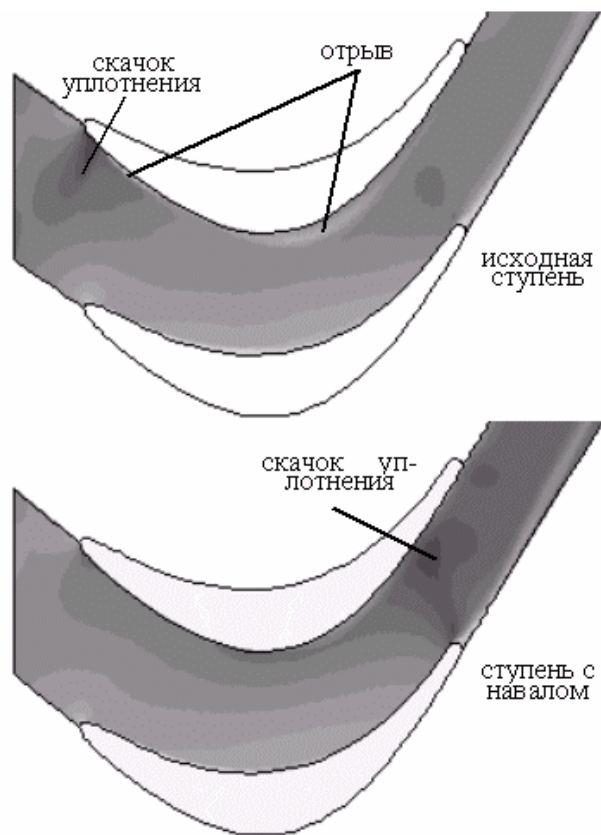


Рис. 7.8. Изолинии чисел Маха в прикорневом сечении ротора

На рис. 7.11 показаны изолинии чисел Маха в периферийном сечении ротора для исходной и модернизированной ступеней. Видно, что в исходной ступени наблюдается интенсивный отрыв на стороне разрежения за скачком уплотнения. В модернизированной ступени этот отрыв практически полностью устранен, что можно наблюдать на рис. 7.12, где изображены изолинии энтропийной функции за решеткой ротора. В результате оптимизации КПД повышен на 0,7 %.

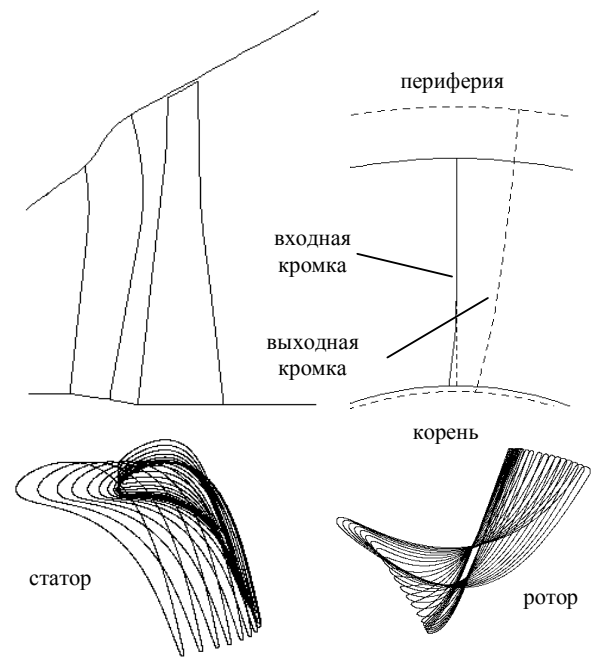


Рис. 7.9. Ступень с саблевидной лопаткой статора

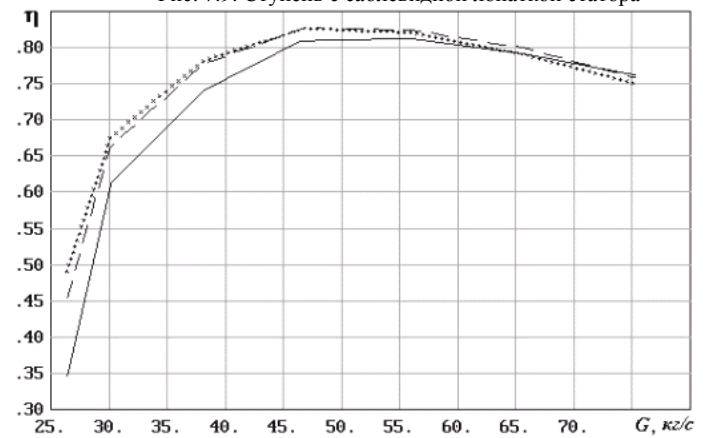


Рис. 7.10. Зависимость КПД от массового расхода через ступень:

— исходная ступень; — ступень с навалом лопаток статора; — ступень с саблевидной лопаткой статора

Таблица 4

Характеристики оптимизируемой ступени газовой турбины

Ступень: Параметр	Исходная		Модернизированная	
	Статор	Ротор	Статор	Ротор
Относительная длина лопатки l/b	0,436	0,867	0,446	0,867
Относительный шаг решетки t/b	0,77	0,77	0,77	0,77
Веерность решетки D/l	10,66	9,56	10,46	9,56
Эффективный угол выхода $\sin^{-1}(a/t)$, град	17,32	25,31	17,88	25,53
Количество лопаток	19	34	19	34
Угол установки, град	57	30	57,4	29,5
Угол закрутки, град	0,0	21	0,4	19,9
Угол осевого навала, град	0,0	0,0	4,1	0,0
Угол окружного навала, град	0,0	0,0	3,3	0,0
Саблевидность	нет	нет		нет
Полное давление на входе, Па	770190		770190	
Давление на выходе, Па	247230		247230	
Полная температура на входе, К	1420		1420	
Расход, кг/с	1,762		1,754	
Реактивность	0,4066		0,3337	
КПД с учетом выходной скорости	0,8462		0,8531	

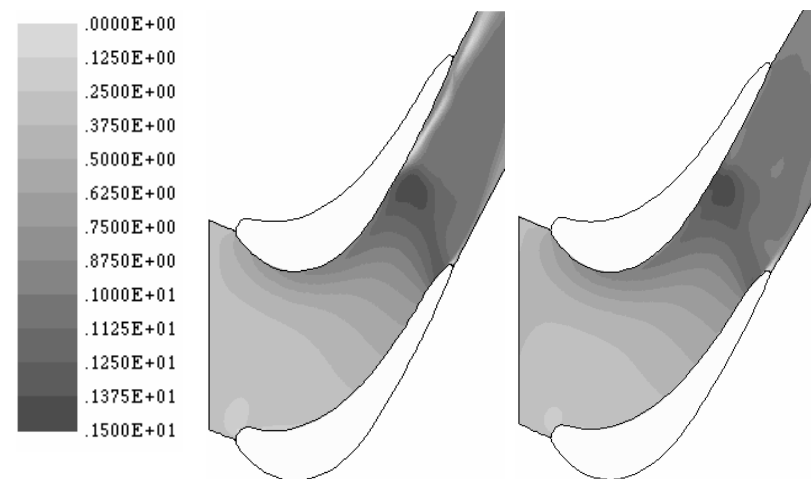


Рис. 7.11. Изолинии числа Маха в межлопаточном канале ротора газовой турбины для исходной (слева) и модернизированной (справа) ступеней

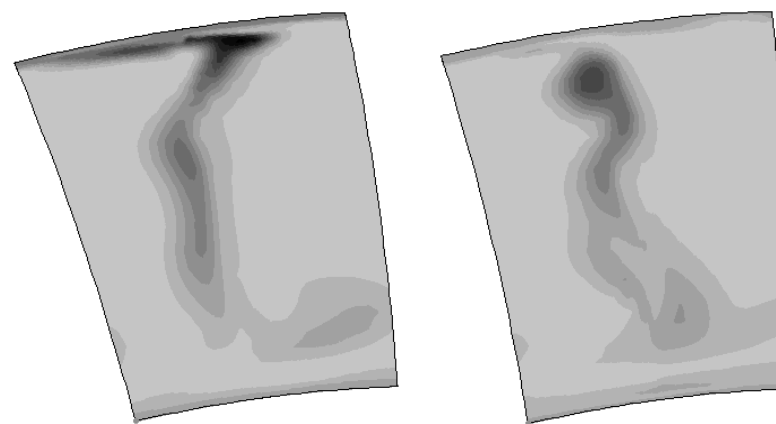


Рис. 7.12. Изолинии энтропийной функции за ротором газовой турбины для исходной (слева) и модернизированной (справа) ступеней

ГЛАВА 8. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ОСЕВЫХ КОМПРЕССОРОВ

Главной задачей оптимального проектирования осевого компрессора является задача получения компрессора, обладающего малым весом, компактностью и высокой эффективностью при снижении стоимости и времени цикла проектирования. В конечном счете, это позволит быстро адаптировать проектируемый компрессор к изменяющимся требованиям обеспечения высоких характеристик газотурбинных двигателей в целом и условиям современного рынка. Необходимость дальнейшего совершенствования характеристик компрессоров обусловлена тем обстоятельством, что облик и к.п.д. газотурбинных установок во многом определяется именно эффективностью компрессора.

Дальнейшее улучшение характеристик осевых компрессоров в настоящее время может быть достигнуто за счет использования трехмерных моделей течения вязкого газа в проточной части на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса в процессе их аэродинамического проектирования. Такого рода задачи, способные с высокой точностью моделировать пространственные вязкие течения газа в проточной части турбомашин, уже нашли широкое применение в современной практике аэродинамических исследований в различных областях техники и, в частности, в турбомашиностроении и авиадвигателестроении. Следует отметить, что поскольку течение газа в проточной части компрессоров происходит с положительным градиентом давления и имеет чрезвычайно сложный характер, то его нельзя с достаточной точностью описать при помощи двумерных моделей течения.

Несмотря на это обстоятельство, двумерные системы проектирования, в основе которых лежат двумерные модели течения газа, играют по-прежнему исключительно важную роль в системах автоматизированного проектирования компрессоров по следующим причинам:

Во-первых, задачи аэродинамической оптимизации компрессоров с использованием трехмерных моделей течения могут быть

решены при большом количестве допущений, поскольку достаточно сложно учесть все необходимые ограничения (аэродинамические, прочностные, технологические и др.), кроме того, различным может быть число варьируемых переменных (геометрических параметров элементов компрессора). В связи с этим, решение таких задач часто ограничено возможностями вычислительной техники.

Во-вторых, прежде, чем приступить к решению задач оптимального проектирования, необходимо задаться некоторым начальным приближением геометрии компрессора, от качества которого зависит время и стоимость всего цикла проектирования.

В-третьих, возможности имеющейся в настоящее время в распоряжении конструктора вычислительной техники не всегда позволяют использовать трехмерные модели течения вязкого газа из-за больших затрат машинного времени. В этом случае использование более простых и быстрых двумерных и квазитрехмерных методов в задачах оптимального проектирования не только целесообразно, но и необходимо.

Следует отметить, что при всех своих достоинствах, современные задачи расчета трехмерного течения вязкого газа в осевых компрессорах используются, главным образом, для окончательной "доводки" проточных частей, полученных с использованием более простых моделей течения.

Таким образом, в современной практике проектирования турбомашин развиваются в общем случае два подхода к оптимизации элементов проточной части, это: 1) задачи с использованием двумерных и квазитрехмерных методов расчета течений; 2) задачи с использованием трехмерных методов. Оба этих подхода в тех или иных комбинациях могут быть использованы в системах автоматизированного проектирования проточной части компрессоров.

Поскольку задачи оптимального аэродинамического проектирования предполагают выполнение большого числа дорогостоящих расчетов течения газа в проточной части турбомашин, то необходимо иметь максимально робастную и эффективную стратегию оптимизации. Это требование имеет особенно важное значение в тех случаях, когда целевая функция, которая в большинстве случаев существенно нелинейна, имеет, так называемые «шумы», то есть не является гладкой, что часто приводит не к глобальному, а некоторому компромиссному решению, а порой вообще ис-

ключает сходимость процесса вычислений при использовании стандартных методов оптимизации. Шумы могут быть вызваны также деформациями расчетной сетки, которая используется для численного решения системы уравнений газовой динамики (как, например, в задаче с тремя границами), плохой сходимостью разностной схемы (с чем можно столкнуться, при использовании хорошо выделяющих скачки уплотнения схем с разностями против потока). Отсутствие гладкости целевой функции может быть вызвано также наличием разрывов в потоке, таких, как скачки уплотнения, контактные разрывы и линии проскальзывания, имеющие место при построении дискретных расчетных сеток. В том случае, когда существуют подобного рода разрывы, даже незначительные изменения некоторых проектных параметров могут заставить их перемещаться из одной вычислительной ячейки в другую, что, в свою очередь, приведет к огромному числу вариаций целевой функции. Все перечисленные выше ситуации могут привести, в конечном счете, к такому результату, когда функция цели имеет несколько локальных экстремумов.

Таким образом, можно сделать вывод, что одной из важнейших проблем, стоящих при решении задач оптимального проектирования компрессоров, является наличие надежного метода решения экстремальных задач, позволяющего с высокой степенью точности и при минимальном числе вычислений найти глобальный максимум целевой функции.

8.1. Общая постановка задачи оптимизации осевого компрессора.

Достижение максимального к.п.д. является только одной из тех целей, которые ставят перед собой конструкторы в задачах аэродинамической оптимизации формы элементов проточной части компрессоров. К тому же задача оптимизации должна учитывать целый ряд прочностных и технологических требований. Таким образом, ставится задача минимизации **целевой функции** (коэффициента потерь) в зависимости от ряда переменных при ограничениях (прочностных, технологических, весовых и др.). Как уже отмечалось выше, целевая функция и накладываемые ограничения в такого рода задачах, как правило, нелинейны.

Рассматривая задачу оптимизации проточной части ступени осевого компрессора как частный случай общей задачи оптимального проектирования технических устройств [2, 157], будем характеризовать ступень компрессора различными группами переменных:

Π - проектные или режимные параметры (расход газа; параметры на входе в ступень и давление на выходе из нее; величины, которые определяют конфигурацию и размеры проточной части), которые задаются конструктором;

Φ - фазовые переменные или параметры состояния, которые определяются в результате расчета течения газа в ступени (параметры газового потока в расчетных сечениях: 1, 2, 3 (см. рис. 8.1));

K - управляющие или контрольные переменные (геометрические параметры ступени, которые можно изменять для достижения максимума критерия эффективности).

Общий подход к решению проблемы состоит в том, чтобы свести задачу с ограничениями к задаче без ограничений. Самым простым способом решения этой проблемы является получение **псевдо-целевой функции** или **целевого функционала** путем суммирования так называемых “штрафных членов”, которые возрастают при нарушении этих ограничений. Этот подход известен в специальной литературе как метод штрафных функций.

В общем случае целевой функционал может быть представлен в следующем виде:

$$OF = F - \Lambda (P_{\text{аэро.ВС}}^2 + P_{\text{мех.}}^2 + P_{\text{геом.}}^2 + P_{\text{реш.}}^2 + P_M^2) = OF(\bar{\Phi}, \bar{\Pi}, \bar{K}) \quad (8.1)$$

где: F - функция цели;

$P_{\text{аэро.ВС}}$ - штрафной член, учитывающий аэродинамические ограничения;

$P_{\text{мех.}}$ - штрафной член, учитывающий механические (прочностные) ограничения;

$P_{\text{геом.}}$ - штрафной член, учитывающий геометрические ограничения;

$P_{\text{реш.}}$ - штрафной член, учитывающий некоторые ограничения параметров решетки;

P_M - штрафной член, учитывающий распределение числа Маха по профилю;

\vec{P} – вектор проектных или режимных параметров;

$\vec{\Phi}$ – вектор фазовых переменных;

\vec{K} – вектор управляющих параметров.

Целью ограничений, накладываемых на аэродинамические граничные условия ($P_{аэро.ВС}$), является обеспечение определенных конструктором ряда аэродинамических параметров на входе в расчетную область и выходе из неё. Существуют семь возможных ограничений такого характера: угол входа потока (β_1), угол выхода

потока (β_2), степень повышения давления $\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)$, показатель

адиабаты $\left(k = \frac{c_p}{c_v}\right)$, число Рейнольдса (Re), масштаб турбулент-

ности (Tu), и, наконец коэффициент потерь энергии (ξ).

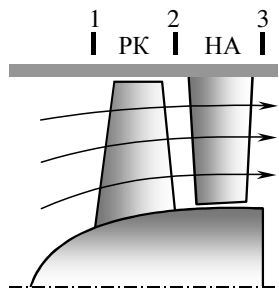


Рис. 8.1. Схема проточной части ступени осевого компрессора.

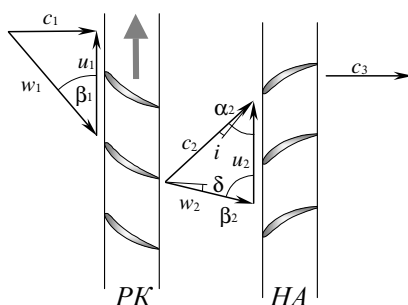


Рис. 8.2. Элементарная ступень осевого компрессора.

Параметрами, которые в первую очередь определяют статическое и динамическое нагружение лопатки и на которые также накладываются ограничения ($P_{мех.}$), являются: площадь сечения профиля лопатки (S), минимальный момент инерции сечения (I_{min}), максимальный момент инерции (I_{max}), угол между осью

минимального момента инерции и осевым направлением, величина проекции хорды на осевое направление (b_c), радиусы входной и выходной кромок ($r_{вх}, r_{вых}$) и относительная толщина профиля лопатки (\bar{c}).

Под геометрическими ограничениями ($P_{геом.}$) понимаются ряд ограничений, которые позволяют контролировать форму профиля. Эти ограничения относятся, в первую очередь, к локальным радиусам кривизны контура профиля, конструктивным лопаточным углам ($\beta_{1к}, \beta_{2к}$) и ряду других геометрических параметров, что позволяет генерировать семейство аэродинамически реальных профилей в процессе оптимизации и свести к минимуму риск получения большого пика скорости на спинке профиля в районе входной кромки или отрыва пограничного слоя в районе выходной кромки.

В некоторых случаях возможно потребуется ввести ряд ограничений на параметры самой решетки ($P_{реш.}$). Эти ограничения обеспечивают получение заданного конструктором значения величины хорды или относительного шага решетки, угла установки или углов раскрытия входной и выходной кромок.

Поскольку целью проектирования является задача получения лопаток, которые имели бы хорошие аэродинамические характеристики, в том числе, и на нерасчетных режимах обтекания, предлагается ввести ряд ограничений, касающихся характера распределения числа M по обводу профиля. Это позволит, в некоторой степени, гарантировать хорошие характеристики решетки в широком диапазоне режимов обтекания без выполнения дополнительной серии расчетов с использованием Навье-Стокс солвера. Дело в том, что если минимизировать потери, то скорее всего может существовать несколько локальных минимумов (несколько различных решеток могут иметь приблизительно одинаковый уровень потерь). В то же самое время, решетки с одинаковыми коэффициентами потерь могут иметь совершенно различный характер распределения числа M по профилю, и эти распределения могут быть использованы для дальнейшего анализа с целью определения, какая из решеток наилучшая.

Следовательно, очень важным аспектом для любого метода аэродинамического проектирования является учет возможности контролировать распределение изоэнтропического числа M по профилю лопатки для того, чтобы обеспечить больший штраф в том случае, когда заведомо известно, что такое распределение не будет оптимальным (например, вызовет преждевременный переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный, приведет к ламинарному или турбулентному отрыву пограничного слоя, станет следствием плохих характеристик на нерасчетных режимах, и т.д.). К такого рода ограничениям относятся: ограничение на плавность изменения числа Маха, ограничения, накладываемые на вторую

производную $\frac{d^2 M(s)}{ds^2}$, ограничение на интенсивность

торможения потока в области входной кромки профиля, ограничение безотрывности обтекания (например, если в качестве критерия отрыва использовать критерий Бури, то для предотвращения турбулентного отрыва его значение должно находиться в пределах $Bu = 0.025 \dots 0.05$).

8.2. Оптимизация конструктивных лопаточных углов ступени осевого компрессора в осевых зазорах.

Ступень без входного направляющего аппарата.

В данном случае необходимо найти оптимальные значения конструктивных углов входа и выхода лопаточных венцов в ряде цилиндрических сечений ступени осевого компрессора по высоте лопаток в осевом зазоре между рабочим колесом и направляющим аппаратом (сечение 2 рис. 8.1). При этом конструктивные углы на входе и выходе из ступени (в сечениях 1 и 3) считаются заданными.

Такая задача является чрезвычайно важной, поскольку из-за того, что течение в проточной части компрессора является существенно трехмерным, реальные углы натекания потока в осевых зазорах отличаются от их расчетных значений и, в наибольшей степени, в районе ограничивающих канал торцевых поверхностей, где трехмерные эффекты весьма существенны. Это особенно важно для последних ступеней высоконапорных компрессоров, где ло-

патки имеют малое относительное удлинение и, как показывают эксперименты, практически невозможно выделить область цилиндрического течения.

Подход заключается в том, что для решения данной задачи необходимо получить ряд соотношений, справедливых для термогазодинамических и кинематических параметров потока в осевых зазорах, которые бы физически полно описывали процесс сжатия воздуха в элементарной ступени компрессора.

Для этой цели оказывается достаточным использовать соотношения, полученные на основании одномерной теории. Однако, для того, чтобы получить достоверные значения фазовых переменных в осевых зазорах и обеспечить выполнение всех требуемых ограничений, необходимо использовать более полную физическую модель течения, основанную на решении системы уравнений Навье-Стокса.

Задача оптимизации заключается в том, чтобы определить такие величины конструктивных углов входа и выхода в сечении 2 по высоте лопатки, при которых обеспечивается максимум критерия эффективности элементарных ступеней компрессора. В качестве такого критерия используется КПД элементарной ступени, которая является функцией термогазодинамических и геометрических параметров ступени. Очень важно, чтобы в процессе максимизации КПД степень повышения полного давления ступени не уменьшалась, а расход воздуха оставался неизменным. Для этого в целевой функционал вводятся соответствующие ограничения.

В процессе оптимизации производится поиск оптимальных углов натекания газа α_{2i} в сечении 2 для элементарных ступеней. После этого определяются соответствующие им величины конструктивных углов входа и выхода для лопаток рабочего колеса и направляющего аппарата.

Исходная система уравнений.

Введем следующие основные допущения:

1. течение относительно подвижного рабочего колеса или неподвижного направляющего аппарата установившееся;
2. газ сжимаемый, невязкий и нетеплопроводный; эффект от вязких сил учитывается в виде возврата теплоты в уравнении

сохранения энергии (т.е. потери на трение учитываются энергетически);

3. массовый расход газа через ступень компрессора есть величина постоянная.

При указанных условиях одномерное течение газа в относительной системе координат, которая вращается вместе с ротором, описывается следующей системой уравнений [13]:

уравнением сохранения энергии (первый интеграл уравнений Ейлера в относительной системе координат):

$$H = i + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} = i + \frac{c^2}{2} - uc_u = const \quad (8.2)$$

уравнение неразрывности:

$$G = \rho \cdot c_a F = const \quad (8.3)$$

уравнение состояния (идеальный газ):

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (8.4)$$

уравнение процесса

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (8.5)$$

Задачу оптимизации ступени компрессора в одномерной постановке формально можно представить следующим образом:
найти

$$\max \eta_{cm}^* (P, \Phi, K) \quad (8.6)$$

при ограничениях: $A_1(P, \Phi, K) = 0$

$$A_2(P, \Phi, K) = 0$$

$$A_3(P, \Phi, K) = 0$$

$$P \in \Omega_P$$

$$\Phi \in [\Phi_{MIN}, \Phi_{MAX}]$$

$$K \in [K_{MIN}, K_{MAX}]$$

где: Π – вектор проектных или режимных параметров;

Φ – вектор фазовых переменных;

K – вектор управляющих параметров.

То есть, необходимо найти такие значения управляющих переменных K , чтобы достигался максимум критерия качества (КПД ступени компрессора) при заданных ограничениях.

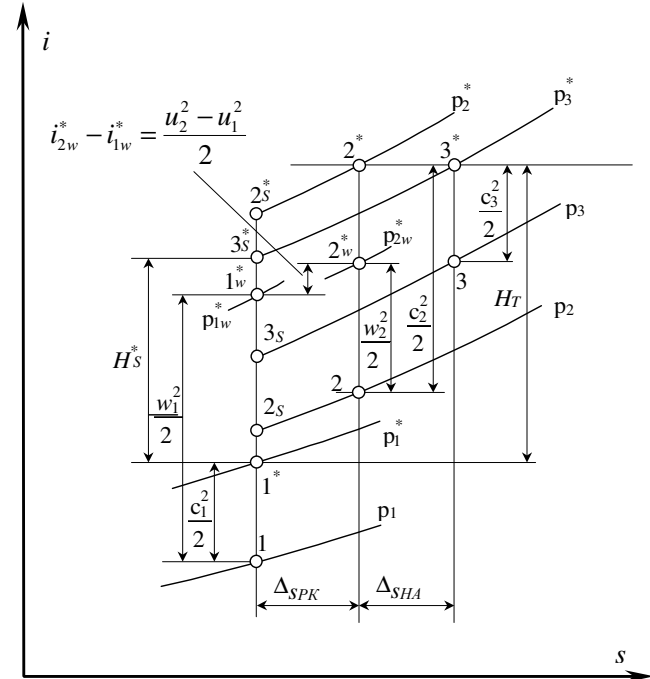


Рис. 8.3. i - s диаграмма процесса сжатия газа в ступени осевого компрессора.

Первые три ограничения (A_1 , A_2 , A_3) включают в себя уравнения, которые описывают течение газа во осевых зазорах. Следующее ограничение ($\Pi \in \Omega_\Pi$) равноценное тому, что заданный режим должен быть физически реализуемым (Ω_Π - множество режимов, которые имеют физический смысл, таких, как $G > 0$, $p_0^* > 0$, $T_0^* > 0$, и тому подобное). Последние два ограничения применяются к области изменения фазовых и управляющих пере-

менных. Ограничением фазовых переменных является, например, то, что они должны быть положительными ($\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, и т.д.). На управляющие переменные накладываются следующие ограничения: $\alpha_{min} \leq \alpha_{2i} \leq \alpha_{max}$. В данном случае: $0 \leq \alpha_{2i} \leq 180$. Для снятия этого ограничения будем считать управляющей переменной не сами углы, а их котангенсы, которые меняются от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении углов от 0^0 до 180^0 .

Расчетные соотношения.

Проточная часть ступени компрессора рассекается на рядом поверхностей тока. Оптимизационная задача решается для каждой такой поверхности.

Целевой функционал, согласно метода штрафных функций, запишем так:

$$F = \eta_{cm}^* - \Lambda(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \quad (8.7)$$

где: η_{cm}^* – адиабатический КПД ступени компрессора;

Λ – штрафной коэффициент;

A_1 , A_2 , A_3 – ограничения, полученные из уравнений сохранения энергии, записанных соответственно для РК, НА и ступени в целом. Уравнения записываются на основании $i-s$ диаграммы процесса сжатия газа в ступени компрессора (см. рис.8.3).

Члены, входящие в целевой функционал, определяются следующим образом:

$$\eta_{cm}^* = \frac{L_{ad.cm}^*}{H_m} = \frac{\frac{k}{k-1} R(T_{3ad}^* - T_1^*)}{c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1} \quad (8.8)$$

$$A_1 \equiv i_{2w}^* - i_{1w}^* - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = 0 \quad (8.9)$$

$$A_2 \equiv i_3^* - i_1^* = 0 \quad (8.10)$$

$$A_3 \equiv i_3^* - i_1^* - L_{ad.cm}^* - L_{r.PK} - L_{r.HA} = 0 \quad (8.11)$$

Используя известные газодинамические и кинематические соотношения, члены, входящие в целевой функционал, можно преобразовать к виду, удобному для решения оптимизационной задачи:

$$\eta_{cm}^* = \frac{\frac{k}{k-1} RT_1^* \left(\pi_{cm}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{c_{2a} u_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 - c_{1a} u_1 \operatorname{ctg} \alpha_1} \quad (8.12)$$

$$A_1 \equiv i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} \operatorname{ctg} \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} \operatorname{ctg} \alpha_1)^2}{2} - \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = 0 \quad (8.13)$$

$$A_2 \equiv i_2 - i_1 + 0,5 c_{2a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_2)) - 0,5 c_{1a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_1)) - c_{2a} u_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 + c_{1a} u_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 = 0 \quad (8.14)$$

$$A_3 \equiv i_2 - i_1 + 0,5 c_{2a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_2)) - 0,5 c_{1a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_1)) - \frac{k}{k-1} RT_1^* \left(\pi_{cm}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right) - \xi_{P.K} \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} \operatorname{ctg} \alpha_1)^2}{2} - 0,5 \xi_{H.A} c_{2a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_2)) = 0 \quad (8.15)$$

Алгоритм расчета:

1. Производится расчет течения вязкого газа в проточной части исходного приближения ступени компрессора на основании решения системы уравнений Навье-Стокса. В результате расчета получаем вектор фазовых переменных.
2. Решается оптимизационная задача по корректировке углов натекания потока в осевых зазорах ступени осевого компрессора.
3. Выполняется модификация конструктивных углов входа и выхода лопаточных венцов соответственно новым углам α_{2i}
4. Вычисляется невязка и если ее значение больше предварительно заданной величины, то перейти к шагу 1, если меньше - закончить оптимизацию.

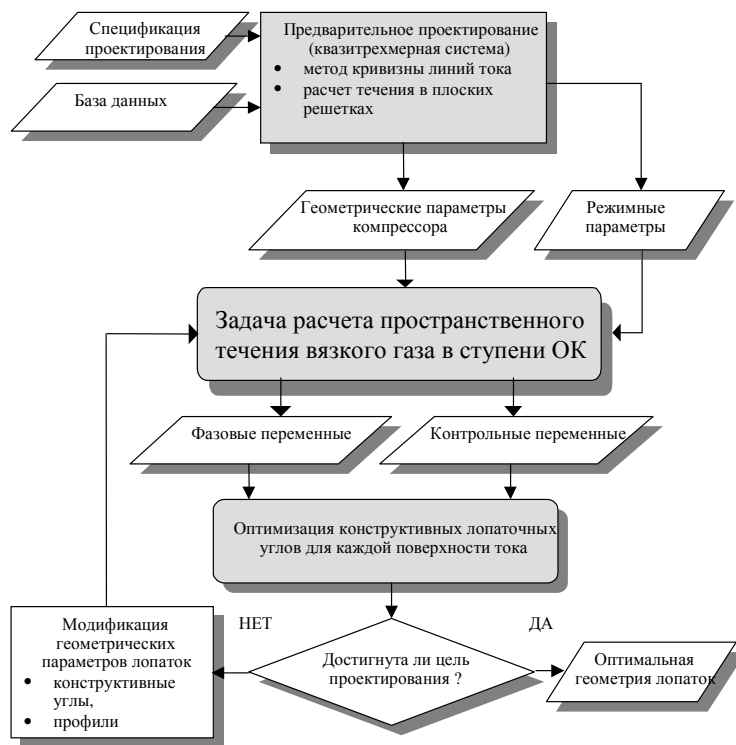


Рис. 8.4. Оптимизация конструктивных лопаточных углов: предлагаемый подход.

Модификация конструктивных углов входа и выхода лопаточных венцов в осевых зазорах соответственно новым углам α_{2i} выполняется путем перехода от углов натекания α_2 к конструктивным углам лопаточных венцов.

Конструктивные лопаточные углы связаны с углами потока соотношением [156]:

$$\beta'_i = \beta_i - [(\Delta\beta_i - i_{opt_{i-1}}) / \left(\frac{1}{m} \sqrt{\left(\frac{b}{t} \right)_i} - 1 \right)] \quad (8.16)$$

где i_{opt} - оптимальное значение угла атаки, которое может быть определено из соотношений [156];

$(b/t)_i$ - относительный шаг решетки;

$$m = 0.92 \bar{x}_f^2 + 0.002(90 - \beta_i);$$

$\Delta\beta_i$ - угол поворота потока в решетке.

Таким образом, имеем общую задачу нелинейного программирования. Максимизация целевого функционала производится с помощью симплексного метода Нелдера-Мида [16].

Полученные значения оптимальных конструктивных углов для каждой поверхности тока в дальнейшем используются для реконструкции формы лопаток.

Предлагаемый подход к оптимизации конструктивных лопаточных углов представлен на рис.8.4.

Спецификация проектирования включает предполагаемые значения к.п.д. ступени, степени повышения давления, коэффициенты потерь. База данных включает корреляционные зависимости по профильным, вторичным потерям, диапазоны изменения углов потока и другие корреляции, имеющиеся для семейства осевых компрессоров.

Корректировка профилей и конструктивных лопаточных углов по высоте лопатки от втулки к периферии осуществляется путем итерации до тех пор, пока невязка изменения функции цели не станет меньше заранее заданного значения.

Ступень с входным направляющим аппаратом.

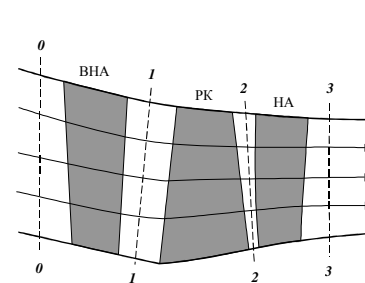


Рис 8.5. Ступень осевого компрессора с входным направляющим аппаратом.

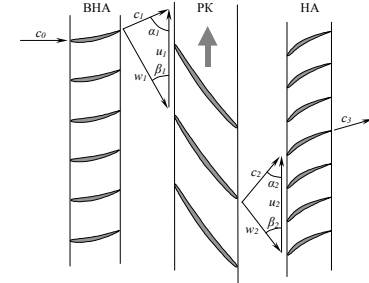


Рис. 8.6. Треугольники скоростей в осевых зазорах ступени компрессора с ВНА

Изложенный выше подход может быть применен и к ступени с направляющим аппаратом (ВНА).

Рассмотрим ступень с направляющим аппаратом (рис. 8.5). Такая ступень, как правило, используется в качестве первой ступени многоступенчатого компрессора.

Треугольники скоростей для такой ступени представлены на рис. 8.6. При решении данной задачи используются те же допущения, что и для ступени без ВНА.

Задачу оптимизации ступени компрессора ВНА в одномерной постановке формально можно представить следующим образом:

$$\text{найти} \quad \min \xi_{ст}(\Pi, \Phi, K) \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \text{при ограничениях:} \quad & A_1(\Pi, \Phi, K)=0 \\ & A_2(\Pi, \Phi, K)=0 \\ & A_3(\Pi, \Phi, K)=0 \\ & A_4(\Pi, \Phi, K)=0 \\ & \Pi \in \Omega_{\Pi} \\ & \Phi \in [\Phi_{MIN}, \Phi_{MAX}] \\ & K \in [K_{MIN}, K_{MAX}] \end{aligned} \quad (8.18)$$

где: $\xi_{ст}$ – потери в ступени;

Π – вектор проектных или режимных параметров;

Φ – вектор фазовых переменных;

K – вектор управляющих параметров.

Целевой функционал, согласно метода штрафных функций, запишем так:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^h (\xi + \lambda(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2)) dr \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^N [\xi_i + \lambda(A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + A_{3i}^2 + A_{4i}^2)] \end{aligned} \quad (8.19)$$

где: ξ_i – потери кинетической энергии на i -й поверхности тока ступени компрессора;

N - количество поверхностей тока;

Λ – штрафной коэффициент;

A_1, A_2, A_3, A_4 – ограничения, полученные из уравнений сохранения энергии, записанных соответственно для РК, НА и ступени в целом.

$$A_{1i} \equiv i_1^* - i_0^* = 0 \quad (8.20)$$

$$A_{2i} \equiv i_2^* - i_1^* - L_u = 0 \quad (8.21)$$

$$A_{3i} \equiv i_3^* - i_2^* = 0 \quad (8.22)$$

$$A_{4i} \equiv i_3^* - i_0^* - L_{ad.cm}^* - \Lambda L_r - L_{r(BHA)} - L_{r(PK)} - L_{r(HA)} = 0 \quad (8.23)$$

При помощи T - s диаграммы процесса сжатия воздуха в ступени с ВНА (рис. 8.7) можно получить расчетные соотношения для целевой функции и ограничений.

Особенностью данной постановки задачи является то, что в качестве функции цели используются потери кинетической энергии не на каждой конкретной поверхности тока, а полные потери во всей ступени. Для этого функционал представлен в виде суммы значений потерь по высоте лопаток с необходимыми штрафными функциями для всех поверхностей тока.

Соотношение для функции цели можно получить, если учесть, что выражение для адиабатической работы сжатия в элементарной ступени в полных параметрах записывается следующим образом:

$$L_{ad.cm}^* = \frac{k}{k-1} R(T_{3ad}^* - T_0^*) = \frac{k}{k-1} RT_0^* \left(\pi_{cm}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \quad (8.24)$$

Выражение для работы на окружности колеса элементарной ступени или затраченной работы, полученное из уравнения Эйлера имеет вид:

$$L_u = c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1 = c_{2a} u_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 - c_{1a} u_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 \quad (8.25)$$

С учетом выражений 8.24, 8.25, потери кинетической энергии газового потока в элементарной ступени будут определяться соотношением:

$$\begin{aligned}\xi_{cm,i} &= 1 - \eta_{cm,i}^* = 1 - \left(\frac{L_{ad,cm}^*}{L_u} \right)_i = 1 - \left(\frac{\frac{k}{k-1} R(T_{3ad}^* - T_0^*)}{c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1} \right)_i \\ &= 1 - \left(\frac{\frac{k}{k-1} RT_0^* \left(\pi_{cm}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{c_{2a}u_2 ctg \alpha_2 - c_{1a}u_1 ctg \alpha_1} \right)_i\end{aligned}\quad (8.26)$$

Для того, чтобы получить соотношения для ограничений целевой функции, рассмотрим уравнения сохранения энергии для каждого венца в отдельности и для ступени в целом.

1. Уравнение сохранения энергии для первого венца (входной направляющий аппарат) имеет вид:

$$\begin{aligned}A_{1i} &= i_1^* - i_0^* = \left(i_1 + \frac{c_1^2}{2} \right) - \left(i_0 + \frac{c_0^2}{2} \right) = \\ &= \left(i_1 + \frac{c_{1a}^2}{2 \sin^2 \alpha_1} \right) - \left(i_0 + \frac{c_{0a}^2}{2 \sin^2 \alpha_0} \right) = \\ &= i_1 - i_0 + 0,5c_{1a}^2 (1 + ctg^2(\alpha_1)) - 0,5c_{0a}^2 (1 + ctg^2(\alpha_0)) = 0\end{aligned}$$

2. Уравнение сохранения энергии для второго венца (рабочее колесо) в абсолютном движении:

$$\begin{aligned}A_{2i} &= i_2^* - i_1^* = i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + c_{2u}^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + c_{1u}^2}{2} - L_u = \\ &= i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} ctg \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} ctg \alpha_1)^2}{2} - L_u\end{aligned}$$

Поскольку $L_u = c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1 = c_{2a}u_2 ctg \alpha_2 - c_{1a}u_1 ctg \alpha_1$, тогда

$$\begin{aligned}A_{2i} &\equiv \left(i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} ctg \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} ctg \alpha_1)^2}{2} \right) - \\ &- (c_{2a}u_2 ctg \alpha_2 - c_{1a}u_1 ctg \alpha_1) = 0\end{aligned}$$

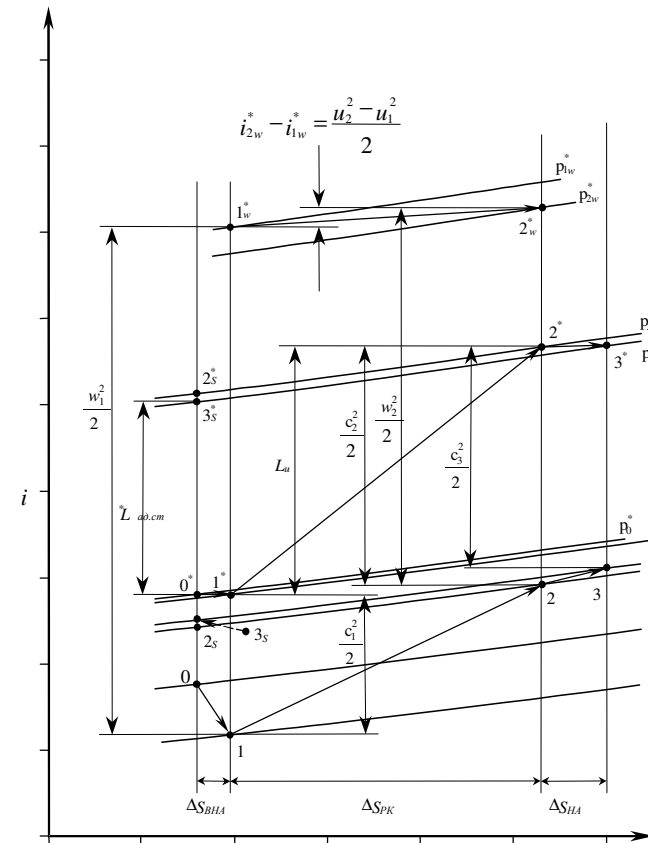


Рис. 8.7. i - s диаграмма процесса сжатия газа в ступени осевого компрессора с ВНА.

Уравнение сохранения энергии для третьего венца (направляющий аппарат):

$$A_{3i} = i_3^* - i_2^* = \left(i_3 - \frac{c_3^2}{2} \right) - \left(i_2 + \frac{c_2^2}{2} \right) =$$

$$\left(i_3 + \frac{c_{3a}^2}{2 \sin^2 \alpha_3} \right) - \left(i_2 + \frac{c_{2a}^2}{2 \sin^2 \alpha_2} \right) =$$

$$= i_3 - i_2 + 0,5 c_{3a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_3)) - 0,5 c_{2a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_2))$$

3. Уравнение сохранения энергии для элементарной ступени в целом:

$$A_{4i} \equiv i_3^* - i_0^* - L_{ad.cm}^* - \Delta L_r - L_{r(BHA)} - L_{r(PK)} - L_{r(HA)} = 0$$

$$i_3^* - i_0^* = i_2^* - i_1^* = i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + c_{2u}^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + c_{1u}^2}{2} =$$

$$= i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} \operatorname{ctg} \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} \operatorname{ctg} \alpha_1)^2}{2}$$

$$L_{ad.cm}^* = \frac{k}{k-1} R (T_{3ad}^* - T_0^*) = \frac{k}{k-1} R T_0^* \left(\pi_{cm}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

Тепловое сопротивление согласно [156] приближенно определяется соотношением:

$$\Delta L_r \approx L_r \frac{\Delta T_{cp}}{2 T_{cp}} = L_r \frac{T_3 - T_0}{2 \frac{(T_3 + T_0)}{2}} = L_r \frac{T_3 - T_0}{(T_3 + T_0)}$$

$$L_{r(BHA)} = \xi_{BHA} \frac{c_0^2}{2} = \xi_{BHA} \frac{c_{0a}^2}{2 \sin^2 \alpha_0} = 0,5 \xi_{BHA} c_{0a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha_0))$$

$$L_{r(PK)} = \xi_{PK} \frac{w_1^2}{2} = \xi_{PK} \frac{c_{1a}^2 + w_{1u}^2}{2} =$$

$$\xi_{PK} \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1u})^2}{2} = \xi_{PK} \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} \operatorname{ctg} \alpha_1)^2}{2}$$

$$L_{r(HA)} = \xi_{HA} \frac{c_2^2}{2} = \xi_{HA} \frac{c_{2a}^2}{2 \sin^2 \alpha_2} = 0,5 \xi_{HA} c_{2a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_2)$$

$$A_{4i} \equiv \underbrace{i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} \operatorname{ctg} \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} \operatorname{ctg} \alpha_1)^2}{2}}_{i_2^* - i_1^*} - \underbrace{\frac{k}{k-1} R T_0^* \left(\pi_{cm}^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right)}_{L_{ad.cm}^*} -$$

$$\begin{aligned}
& -\underbrace{L_r \frac{T_3 - T_0}{(T_3 + T_0)}}_{\Delta L_r} - \underbrace{\xi_{BHA} \frac{c_{0a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_0)}{2}}_{L_{\gamma(BHA)}} - \underbrace{\xi_{PK} \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} ctg \alpha_1)^2}{2}}_{L_{\gamma(PK)}} - \\
& \quad - \underbrace{\xi_{HA} \frac{c_{2a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_2)}{2}}_{L_{\gamma(HA)}} = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим:

$$A_{1i} \equiv i_1 - i_0 + \frac{c_{1a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_1)}{2} - \frac{c_{0a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_0)}{2} = 0 \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned}
A_{2i} \equiv & \left(i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} ctg \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} ctg \alpha_1)^2}{2} \right) - \\
& - (c_{2a} u_2 ctg \alpha_2 - c_{1a} u_1 ctg \alpha_1) = 0
\end{aligned} \quad (8.28)$$

$$A_{3i} \equiv i_3 - i_2 + \frac{c_{3a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_3)}{2} - \frac{c_{2a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_2)}{2} = 0 \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned}
A_{4i} \equiv & \underbrace{i_2 - i_1 + \frac{c_{2a}^2 + (u_2 - c_{2a} ctg \alpha_2)^2}{2} - \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} ctg \alpha_1)^2}{2}}_{i_3^* - i_0^*} - \\
& - \underbrace{\frac{k}{k-1} RT_0^* \left(\pi_{cm}^{* \frac{k-1}{k}} - 1 \right)}_{L_{\alpha 0, cm}^*} - \underbrace{L_r \frac{T_3 - T_0}{(T_3 + T_0)}}_{\Delta L_r} -
\end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned}
& -\underbrace{\xi_{BHA} \frac{c_{0a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_0)}{2}}_{L_{\gamma(BHA)}} - \underbrace{\xi_{PK} \frac{c_{1a}^2 + (u_1 - c_{1a} ctg \alpha_1)^2}{2}}_{L_{\gamma(PK)}} - \underbrace{\xi_{HA} \frac{c_{2a}^2 (1 + ctg^2 \alpha_2)}{2}}_{L_{\gamma(HA)}} = 0
\end{aligned}$$

В данном случае, имеем общую задачу нелинейного программирования, которая может быть решена одним из методов, описанных в [16].

8.3. Особенности оптимизации сверхзвуковых ступеней.

Рассматривать сверхзвуковые двумерные течения в плоскости решетки необходимо в тесной связи с меридиональным течением, которое определяет изменение радиуса поверхности тока и соответствующее уменьшение площади поперечного меридионального потока в лопаточном венце. Затем анализ течения на поверхности тока в плоскости решетки позволяет определить поворот потока и потери. Взаимозависимость этих двух течений особенно тесная при

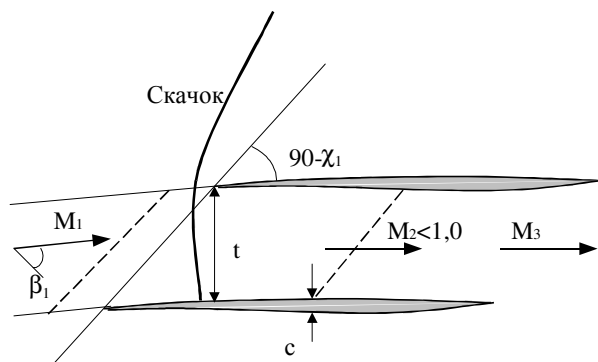


Рис. 8.8. Схема обтекания решетки для анализа незапертого сверхзвукового течения.

сверхзвуковом течении в лопаточном венце. В этом случае изменение плотности и давления обычно велики, запираение межлопаточного канала становится более общим явлением и существенно возрастают потери (до 10...20 % от входного динамического напора в относительном движении). Небольшие изменения поперечного сечения оказывают значительное влияние на трансзвуковое и сверхзвуковое течение, а изменения течения на одной поверхности тока по высоте лопатки могут существенно повлиять на течение на других радиусах. Максимальная производительность, определяемая запираением межлопаточного канала, является чрезвычайно важной характеристикой компрессора. В любом случае, в процессе оптимизации должен обеспечиваться суммарный расход для всей машины, но, в тоже время, он должен быть примерно постоянным и по высоте лопаток. При таких условиях нет оснований считать,

что квазитрехмерные методы дают вполне удовлетворительные результаты при оптимизации сверхзвуковых компрессоров.

Тенденция разработки многочисленных сверхзвуковых компрессорных ступеней связана с тем, что в большинстве случаев продувки плоских решеток не позволяют моделировать течение в реальных условиях работы и получить надежные соотношения для определения потерь и оптимальных углов атаки, поэтому для

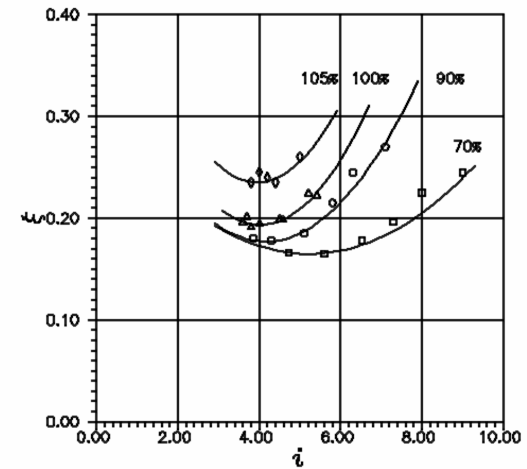


Рис. 8.9. Сравнение измеренных потерь [160] с рассчитанными по предлагаемому соотношению (8.31).

$$100\% \text{ окружной скорости при } u \sqrt{c_p T_1^*} = 0.87.$$

Сплошные линии - расчет, значки - эксперимент. Цифры означают частоту вращения в % от расчетной

разработки компрессоров приходится испытывать компрессорные ступени или использовать полностью трехмерные расчеты течения. Наконец, были и остаются дополнительные сложности, связанные с тем, что в сверхзвуковых ступенях имеет место значительная деформация лопаток под действием больших центробежных и аэродинамических сил, что необходимо учитывать в задачах оптимизации. Так, к примеру, в вентиляторах с малым относительным диаметром втулки происходят уменьшение до 4° угла выноса лопатки

и значительное изменение угла изгиба при переходе компрессора от статического режима к работе на максимальной окружной скорости.

В работе [159] установлено, что максимальные потери возникают тогда, когда перед решеткой образуется прямой скачок уплотнения. Повышение энтропии, эквивалентное потерям полного давления в относительном движении в прямом скачке уплотнения, увеличивается пропорционально $(M_1 - 1)^3$, так что минимальные потери быстро возрастают с увеличением окружной скорости. Таким образом, потери сильно зависят от угла атаки и окружной скорости. При данном угле атаки, однако, толщина профиля не оказывает большого влияния на потери.

Тем не менее, толщина профиля является важным косвенно влияющим параметром, поскольку она определяет минимальный угол атаки, при котором происходит заклинивание решетки. В работе [159] также предлагается эмпирическая линейная зависимость для потерь в сверхзвуковой решетке, которая не достаточно точно отражает характер изменения потерь по углу атаки и не пригодна для оптимизации решетки.

Предлагается следующая зависимость для потерь в сверхзвуковых компрессорных решетках, полученная с использованием экспериментальных данных работы [160], которая достаточно точно описывает характер изменения и величину потерь по углу атаки и окружной скорости.

$$\xi_{отн} = \frac{\Delta p^*}{(P_1^* - P_1)_{отн}} = m_1 i^2 - m_2 i + m_3, \quad (8.31)$$

где $m_1 = -0,6103(u\sqrt{c_p T_1^*})^3 + 1,4819(u\sqrt{c_p T_1^*})^2 - 1,1367(u\sqrt{c_p T_1^*}) - 0,2857$,

$$m_2 = -6,0006(u\sqrt{c_p T_1^*})^3 + 14,483(u\sqrt{c_p T_1^*})^2 - 11,172(u\sqrt{c_p T_1^*}) + 2,8417,$$

$$m_3 = 2,8058(u\sqrt{c_p T_1^*})^3 - 3,7308(u\sqrt{c_p T_1^*})^2 + 1,4623(u\sqrt{c_p T_1^*}) + 0,1652,$$

$i = \beta_1 - \chi$ - угол атаки.

Сравнение экспериментальных данных работы [160] с рассчитанными по соотношению (8.31) представлено на рис. 8.9.

Если продифференцировать выражение (8.31) и затем приравнять к нулю, то можно получить соотношение для оптимальных углов атаки, которое можно использовать в качестве замыкающего соотношения для задачи оптимизации сверхзвуковой ступени:

$$\frac{d\xi_{opt}}{di} = 2m_1(\beta_1 - \chi) - m_2 = 0,$$

откуда

$$\chi_{opt} = \beta_1 - \frac{m_2}{2m_1} \quad (8.32)$$

Поскольку лопатки рабочих колес сверхзвуковых ступеней компрессора подвержены значительным деформациям под действием газодинамических и центробежных сил, особенно в концевых сечениях лопатки, то при определении χ_{opt} необходимо учитывать величину деформации (раскрутки) лопатки. Тогда, если величину раскрутки обозначить как $\Delta\chi$, то соотношение (8.32) примет вид:

$$\chi_{opt} = \beta_1 - \frac{m_2}{2m_1} - \Delta\chi \quad (8.33)$$

Для лопаток направляющего аппарата, в котором течение дозвуковое, конструктивные лопаточные углы определяются по соотношению (8.16) и зависимостям работы [156].

Таким образом, для решения задачи оптимизации углов установки профилей лопатки рабочего колеса и конструктивных лопаточных углов направляющего аппарата ступени сверхзвукового компрессора введем следующие дополнительные допущения:

1. Будем считать, что изгиб профилей лопаток рабочего колеса незначительный, а сами профили тонкие (что достаточно справедливо для сверхзвуковых решеток).
2. При определении потерь в сверхзвуковых решетках определяющими являются потери в скачке уплотнения.
3. Считаем, что потери в сверхзвуковых решетках зависят, главным образом, от угла атаки и окружной скорости и мало зависят от шага решетки и относительной толщины профиля.

Тогда задача оптимизации сверхзвуковой ступени компрессора будет формулироваться следующим образом:

$$\text{найти} \quad \min \xi_{cm}(P, \Phi, K) \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} \text{при ограничениях:} \quad & A_1(P, \Phi, K) = 0 \\ & A_2(P, \Phi, K) = 0 \\ & A_3(P, \Phi, K) = 0 \\ & A_4(P, \Phi, K) = 0 \\ & A_5(P, \Phi, K) = 0 \\ & P \in \Omega_P \\ & \Phi \in [\Phi_{MIN}, \Phi_{MAX}] \\ & K \in [K_{MIN}, K_{MAX}] \end{aligned} \quad (8.34)$$

где: ξ_{cm} – потери в ступени;

P – вектор проектных или режимных параметров;

Φ – вектор фазовых переменных;

K – вектор управляющих параметров.

Целевой функционал и ограничения A_1, A_2, A_3, A_4 в данном случае определяются таким же образом, как в подразделе 8.2. Ограничение A_5 представляет собой ограничение, накладываемое из условий обеспечения необходимой прочности лопатки. Это ограничение является необходимым, поскольку в процессе оптимизации изменяется распределение и характер нагрузок от действия газодинамических и центробежных сил, а абсолютные значения величин нагрузок на лопатки в сверхзвуковых ступенях достаточно велики. Это ограничение может быть записано следующим образом:

$$A_5 = \max(k_\sigma \sigma_{max} - \sigma_{доп})_i = 0, \quad (8.35)$$

где σ_{max} – максимальные нормальные напряжения в сечении пера лопатки,

$\sigma_{доп}$ – допустимые нормальные напряжения в сечении пера лопатки,

k_σ – коэффициент запаса прочности.

Для учета деформаций лопатки и прочностных ограничений в процессе оптимизации необходимо производить расчет напряжен-

но-деформированного состояния лопатки при помощи одного из известных методов (например, метода конечных элементов [161]).

Таким образом, в результате оптимизации получаем оптимальное изменение углов установки профилей лопаток рабочего колеса ($\chi_{onm\ i}$) и конструктивных лопаточных углов направляющих аппаратов (α_{2i}) по радиусу. Предлагаемый подход к оптимизации сверхзвуковой ступени представлен на рис. 8.10.



Рис. 8.10. Оптимизация углов установки профилей в сверхзвуковой ступени компрессора: предлагаемый подход.

8.4. Оптимизация параметров сложного навала и стреловидности лопаточных венцов компрессора.

Для решения задачи поиска оптимальной формы линии соединяющей центры тяжести профилей лопаток необходимо произвести параметризацию этой линии. Это позволяет уменьшить число контрольных переменных, особенно, если речь идет об оптимизации многоступенчатого компрессора. Схема параметризации линии центров тяжести сечений лопаток представлена на рис. 8.11.

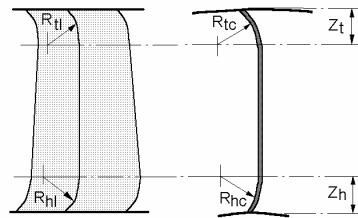


Рис. 8.11. Схема параметризации лопатки компрессора.

В результате параметризации искомую линию можно описать шестью переменными:

Z_t, Z_h - длина загиба концевой и втулочной частей лопатки;

R_{tl}, R_{hl} - радиусы загиба концевой и втулочной частей лопатки в продольном хорде направления;

R_{tc}, R_{hc} - радиусы загиба концевой и втулочной частей лопатки в поперечном хорде направления.

Таким образом, имеем вектор контрольных переменных $K = \{Z_t, Z_h, R_{tl}, R_{hl}, R_{tc}, R_{hc}\}$.

Задача поиска оптимальной пространственной формы лопаточных линий может быть сформулирована следующим образом:

найти
$$\max \eta_{cm}^* (\Pi, \Phi, K) \quad (8.36)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \Pi &\in \Omega_{\Pi} \\ \Phi &\in [\Phi_{MIN}, \Phi_{MAX}] \\ K &\in [K_{MIN}, K_{MAX}], \end{aligned} \quad (8.37)$$

где целевая функция вычисляется в результате пространственного вязкого расчета течения воздуха в компрессоре.

Целевая функция может быть записана в следующем виде:

$$F = \eta_{cm}^* \quad (8.38)$$

где η_{cm}^* - адиабатический к.п.д. ступени компрессора, определяемый выражением (8.8).

Следует отметить, что степень повышения давления (π_{cm}^*) в процессе оптимизации остается неизменной, поскольку при изменении параметров лопаточных линий конструктивные углы входа и выхода не изменяются. Параметры лопаточных линий находятся в ходе итераций.

Ядром процедуры является задача расчета пространственного вязкого течения газа в ступени осевого компрессора, позволяющая вычислить значение целевой функции на каждой итерации.



Рис. 8.12. Оптимизация пространственной формы лопаточных линий: предлагаемый подход.

Максимизация целевого функционала может быть произведена при помощи метода Нелдера-Мида [16].

Предлагаемый подход к оптимизации формы лопаточных линий представлен на рис. 8.12. В результате оптимизации получим оптимальные геометрические параметры сложного навала и стреловидности лопаточных венцов.

8.5. Численный пример оптимизации ступени компрессора.

Предложенный подход был использован для численной оптимизации низкоскоростной компрессорной ступени лаборатории компрессоров Киевского института ВВС (рис. 8.13, 8.14). Основные параметры ступени приведены в таблице 8.1.

Компрессор был предварительно спроектирован с использованием осесимметричной методики. Условия на входе были выбраны следующими: $M=0.2$ и угол потока на входе в ступень 0° . В качестве базовых профилей использовались профили A4. Оптимальные значения конструктивных лопаточных углов были найдены за 3 глобальных итерации, что привело к увеличению к.п.д. на 2.5% при неизменной степени повышения давления.

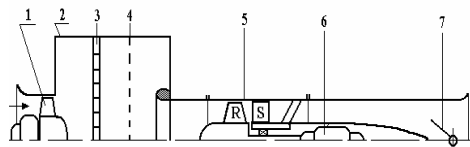


Рис. 8.13. Схема экспериментальной установки:
1-вентилятор наддува; 2-успокоительная камера; 3-хoneyкомб; 4-сетка; 5-компрессор; 6-электродвигатель; 7-дроссельная заслонка.

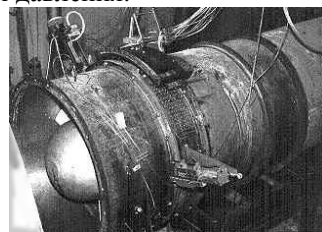


Рис. 8.14. Внешний вид экспериментальной установки

Таблица 8.1.

Параметры исходной низкоскоростной компрессорной ступени

№	Параметр	Ротор	Статор
1.	Хорда, мм	104	104
2.	Концевой диаметр, мм	624	624
3.	Втулочный диаметр, мм	312	312
4.	Число лопаток	11	12
5.	Частота вращения ротора, об/мин	1600	-
6.	Расход воздуха, кг/сек	9.7	9.7
7.	u_k , м/с	52.3	-

Поскольку достоверность результатов оптимизации зависит от точности расчета течения в компрессоре, то для оптимизации был использован широко известный программный комплекс расчета трехмерного вязкого течения в осевой турбомашине *FlowER*, подробно описанный в главе 3.

В результате оптимизации конструктивные углы выхода РК и конструктивные углы входа НА в различных сечениях по высоте лопатки изменились на различные величины (для рабочего колеса - рис. 8.15, для направляющего аппарата - рис. 8.16).

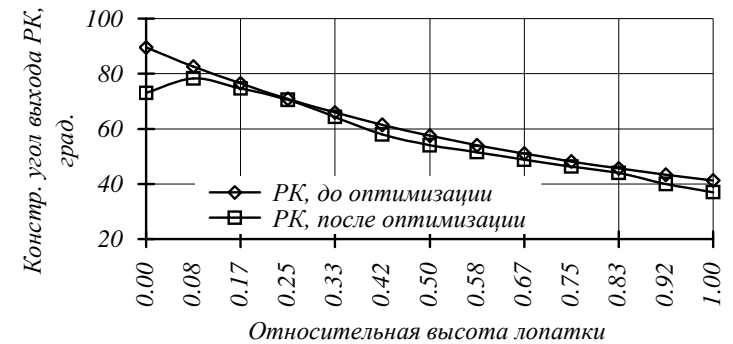


Рис. 8.15. Изменение конструктивных углов выхода РК.

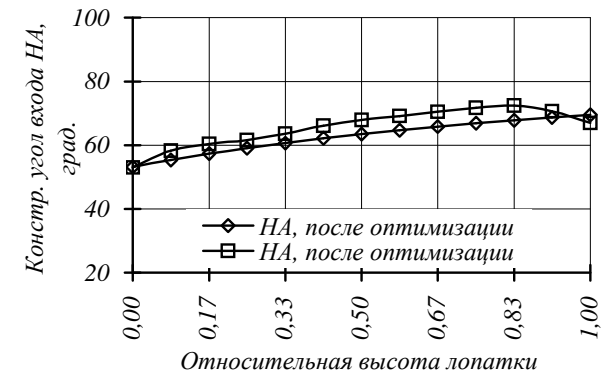


Рис. 8.16. Изменение конструктивных углов входа НА

Оптимальные параметры сложного навала и стреловидности были получены за 12 итераций с использованием задачи расчета пространственного течения вязкого газа в ступени. При этом средняя часть лопатки НА осталась прямой. Периферийные и втулочные части лопатки НА были загнуты на спинку и против потока (см. рис. 8.17). Были получены оптимальные геометрические параметры локальной стреловидности лопатки (у втулки и на периферии). На рис. 8.17 в, г показан направляющий аппарат до и после оптимизации. Такая модификация лопаточных венцов позволила разгрузить втулочные и периферийные сечения, что привело к снижению интенсивности вторичных течений в этих сечениях.

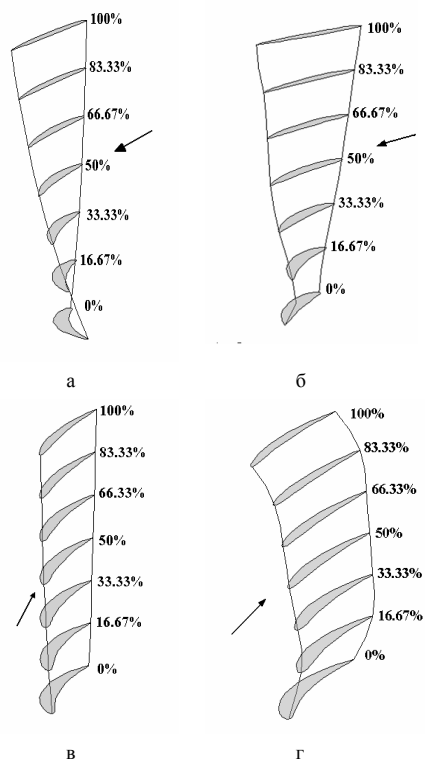


Рис. 8.17. Внешний вид лопатки РК до (а) и после оптимизации (б); лопатки НА до (в) и после оптимизации (г).

Анализ результатов расчета течения газа в проточной части ступени до и после оптимизации позволяет сделать следующие выводы:

1. в пограничном слое на спинке периферийных сечений лопаточных венцов РК и НА полностью исчезли обратные течения (см. рис. 8.20);

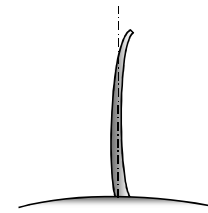


Рис. 8.18. Изгиб оси лопатки на спинку или корытце (переменный по высоте навал).

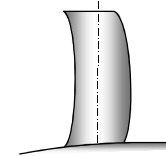


Рис. 8.19. Изгиб оси лопатки на переднюю или заднюю кромку (переменная по высоте стреловидность).

2. значительно уменьшились области отрыва на лопатках РК и НА, а в периферийных и втулочных сечениях течение стало безотрывным, а интенсивность вторичных течений значительно ослабла (см. рис. 8.20, 8.21, 8.23-8.26));

3. на спинке возле носика периферийной части лопатки НА исчез подковообразный вихрь (см. рис. 8.21)).

Таким образом, в результате оптимизации значительно улучшилась структура течения, коэффициент полезного действия ступени возрос при этом на

3,7% (до оптимизации - 87,1%, после оптимизации - 90,8%). Распределение потерь кинетической энергии по высоте лопатки показано на рис. 8.22.

Результаты расчетов и эксперимента показывают, что изменение геометрических параметров лопаточных венцов позволяет влиять на характер течения в пограничном слое. Например, в процессе оптимизации конструктивных лопаточных углов при наличии отрывных явлений происходит изменение конструктивных углов лопаток таким образом, что в этих сечениях лопатка раскручивается, что позволяет разгрузить лопатку в этих сечениях и

уменьшить области отрыва пограничного слоя или получить полностью безотрывное обтекание.

Результаты измерений на дренированных лопатках подтверждаются и результатами измерений за ступенью. На рис. 8.26 представлены распределения потерь кинетической энергии в ступени по высоте лопатки. Из сравнения результатов измерений в базовой ступени и в оптимизированной видно, что уровень потерь в ступени снизился на 25%. Как видно, наибольшие потери в ступени приходятся на втулочные и периферийные сечения.

На рис.8.28 представлены распределения углов отставания потока за ступенью по высоте лопатки. Из сравнения результатов измерений в базовой ступени и в оптимизированной видно, что по всей длине пера лопатки углы отставания потока стали меньше. Как видно, наибольшие углы отставания потока приходятся на втулочные и периферийные сечения.

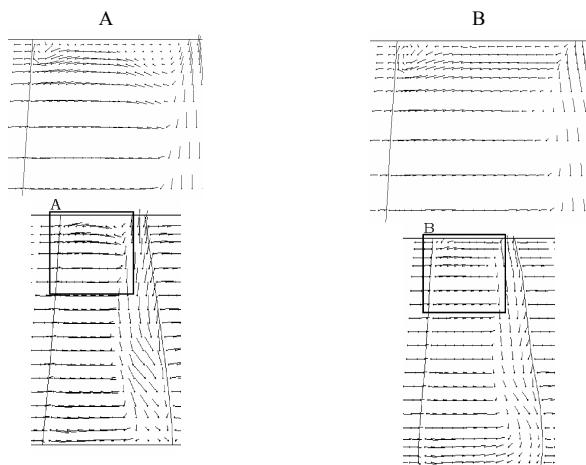


Рис. 8.20. Векторное поле скоростей на спинке лопатки РК до и после оптимизации.

Наибольшее снижение потерь (до 33%) и углов отставания потока (до 15%) наблюдается во втулочных и периферийных сечениях направляющего аппарата, где влияние вторичных течений и концевых эффектов сказывается в большей степени.

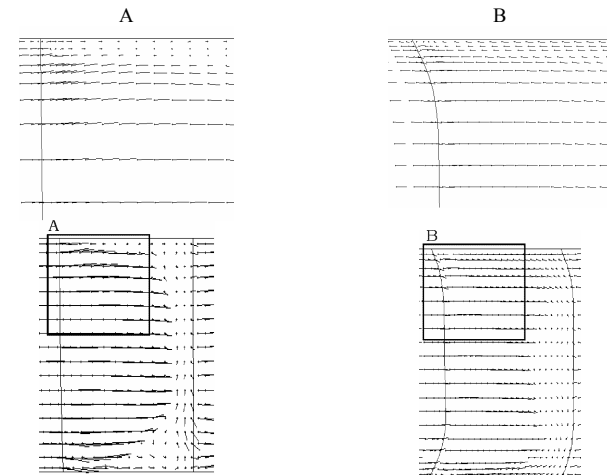


Рис. 8.21. Векторное поле скоростей на спинке лопатки НА до и после оптимизации.

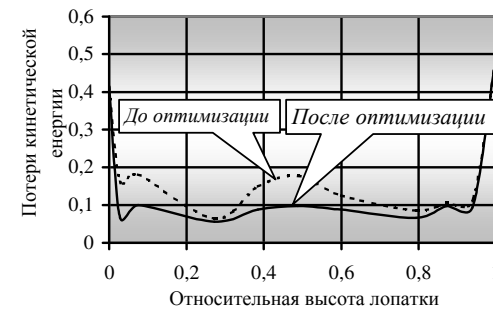


Рис. 8.22. Распределение потерь кинетической энергии по высоте лопатки на выходе из ступени.

Снижение потерь в оптимизированной ступени привело к значительному увеличению КПД ступени - 3,5%. На рис. 8.29 представлены полученные экспериментально характеристики модельной ступени, из анализа которой видно, что в оптимизированной ступени на всех режимах работы ступени КПД больше, чем в

базовой ступени. При этом степень повышения полного давления ступени осталась на заданном уровне, а запас газодинамической устойчивости в оптимизированной ступени стал выше.

В процессе пространственной оптимизации изгиб оси лопатки на спинку или корытце (переменный по высоте навал: рис. 8.18), а также изгиб оси лопатки на переднюю или заднюю кромку (переменная за высотой стреловидность: рис. 8.19) позволяют изменять угол скольжения потока относительно передней кромки. Конструктивные углы лопаток при этом остаются неизменными. Изменение угла скольжения влияет на характер течения в пограничном слое, усиливая или ослабляя поперечные перетекания в пределах пограничного слоя.

Такое воздействие на течение в пограничном слое может различным образом влиять на величину потерь и на КПД ступени. Но в том случае, если целевая функция направлена на повышение параметра эффективности работы ступени, алгоритм оптимизационной задачи приближает значения геометрических параметров к таким, при которых течение в пограничном слое и в ядре потока становится более благоприятным.

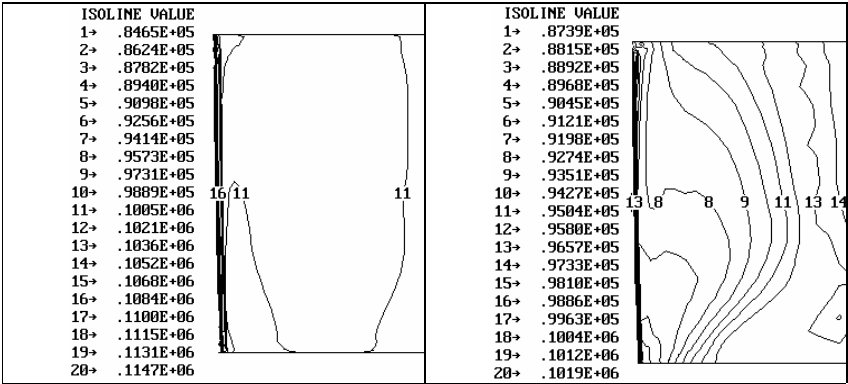


Рис. 8.23. Поле статических давлений на поверхности корыта базового НА.

Рис. 8.24. Поле статических давлений на поверхности спинки базового НА.

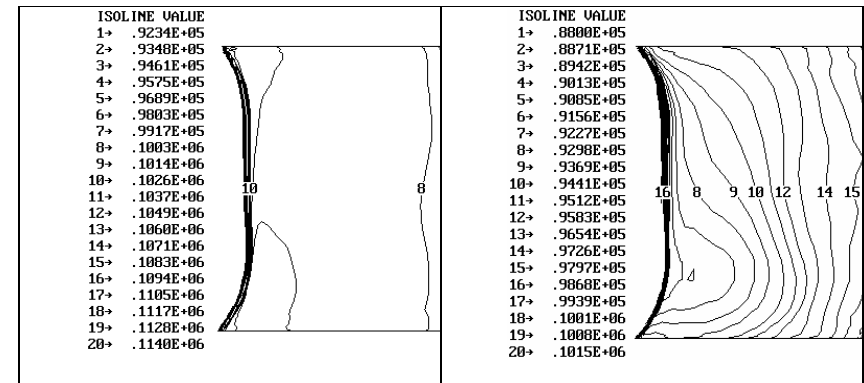


Рис. 8.25. Поле статических давлений на поверхности корыта оптимизированного НА.

Рис. 8.26. Поле статических давлений на поверхности спинки оптимизированного НА.

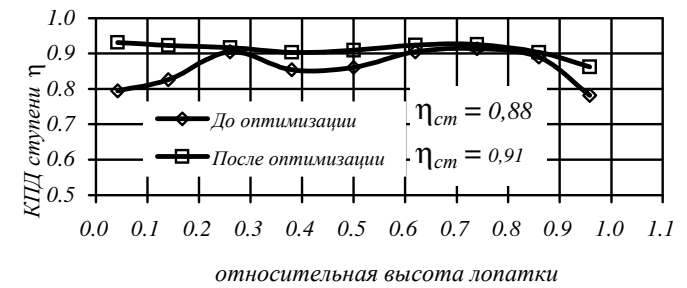


Рис. 8.27. Распределение КПД ступени по высоте лопатки.

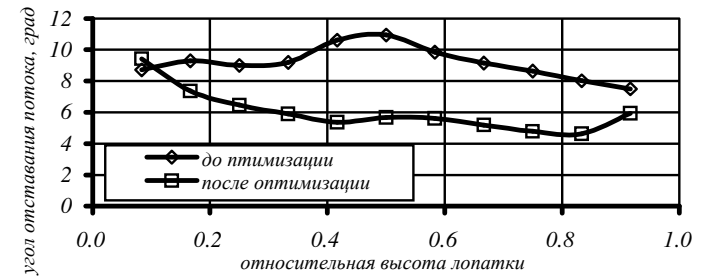


Рис. 8.28. Распределение углов отставания потока за ступенью по высоте лопатки

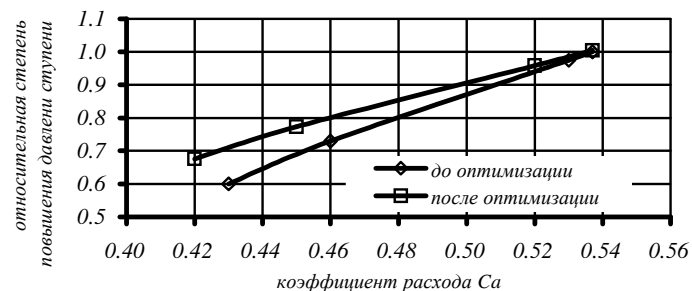


Рис. 8.29 Характеристики модельной ступени до и после оптимизации.

Влияние нерадиальной установки на нагружение лопаток с малой относительной высотой может найти простое объяснение, если проанализировать распределение давления в межлопаточном канале в плоскости перпендикулярной оси компрессора. На рис. 8.30 показаны характерные распределения давления в межлопаточном канале с неизменным по радиусу профилем при трёх различных способах установки лопаток в окружном направлении. Очевидно, что несмотря на различную геометрию лопаточных венцов, преобладающий эффект состоит в том, что линии постоянного давления остаются близкими к радиальным и имеют аналогичный характер протекания для соответствующих сечений межлопаточных каналов. Это легко объяснить тем, что величина кривизны линий тока в поперечном направлении больше, чем в меридиональном сечении, т.е.

$$\frac{V_{rel}^2}{r_{cb}} \gg \frac{V_{\Theta}^2}{r} \text{ и } \frac{V_m^2}{r_{cm}}, \quad (8.39)$$

где r_{cb} – кривизна линий тока в поперечном направлении перпендикулярном хорде лопатки, r_{cm} – кривизна линий тока в меридиональной плоскости, r – местный радиус поверхности тока.

Следовательно, радиальный градиент давления сравнительно небольшой по сравнению с поперечным градиентом давления.

Суммарный эффект таков, что при малых относительных удлинениях различные варианты установки лопаток в канале могут

рассматриваться, как смещение лопаток в практически неизменном поле давления. Для лопаток с простым навалом (рис. 8.30) корневое сечение перемещается в область низких скоростей и, следовательно, их нагруженность уменьшается, в то время как концевые сечения перемещаются в область высоких скоростей и их нагруженность возрастает.

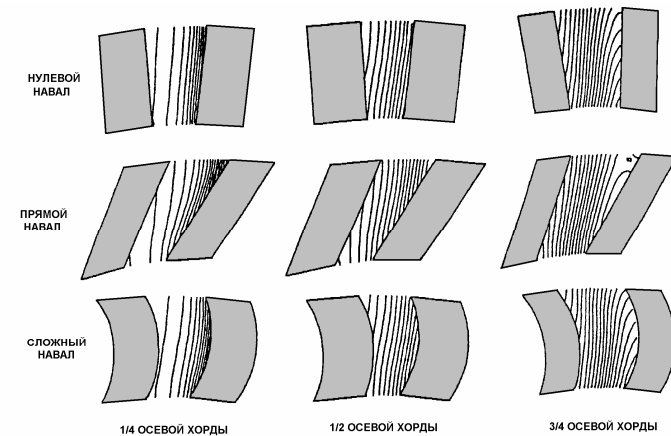


Рис. 8.30. Изолинии статического давления в межлопаточном канале при различных способах установки лопаток (спинка лопаток справа).

Следует отметить, что до настоящего времени не понятен точный механизм, благодаря которому пространственная установка лопаток (особенно комбинированный навал) приводит к снижению вторичных потерь в турбомашинах. Предлагалось множество различных объяснений этого эффекта, в частности, Уолкером (1987) и Харрисоном (1989).

Простое объяснение этого эффекта состоит в том, что увеличение нагруженности средних сечений и разгрузка концевых сечений приводит к тому, что большая часть работы, подводимой к газовому потоку, приходится на наиболее эффективную область лопатки, т.е. на область средних сечений, и меньшая часть - на менее эффективные концевые области лопатки.

Второе объяснение основано на гипотезе перераспределения газа с низкой энергией, которое происходит возле торцевых по-

верхностей под действием радиальных градиентов давления. Комбинированный навал, выполненный с целью снижения нагруженности концевых сечений, приводит к возникновению радиальных градиентов давления, которые действуют в направлении средних сечений лопатки. Следовательно, заторможенный газ в пограничных слоях на поверхностях лопаток и на торцевых поверхностях имеет тенденцию перетекать в направлении средних сечений в большей степени, чем это свойственно вторичным течениям на поверхностях лопаток без навала. Это может предотвратить накопление пограничного слоя и возникновение местного отрыва на спинке лопатки в районе двугранного угла. В результате, поток на выходе из лопаточного венца становится более равномерным, ядро вторичных потерь менее выражено, что приводит уменьшению потерь на смещение. Более равномерный поток на выходе из лопаточного венца приводит также и к снижению потерь в следующем лопаточном венце.

Третье объяснение основано на том факте, что «производство» энтропии (т.е. генерирование потерь) на единицу поверхности пропорционально относительному местному приращению скорости в степени n , где n имеет порядок 2 или 3, в зависимости от состояния пограничного слоя (Дентон 1993 [156]). Если речь идёт о комбинированном навале лопаток, то площадь поверхности приводящая к торможению потока, т.е. торцевые поверхности и лопаточные поверхности в районе двугранных углов, существенно больше, чем площадь поверхности ответственная за разгон потока, т.е. поверхности средней части лопаток. Следовательно, суммарное производство энтропии снижается, хотя суммарная нагрузка и соответствующая ей работа остаются постоянными. Такое объяснение весьма убедительно, но оно не учитывает локальных изменений, происходящих в структуре пограничных слоёв, а именно, ламинарно-турбулентных переходов или отрывов, которые могут иметь место при изменении характера нагружения лопаток.

Анализ экспериментальных исследований оптимизированной ступени показал, что после оптимизации ступень эффективнее работает не только на расчетном режиме, но и на нерасчетных режимах работы ступени. В частности, увеличивается диапазон устойчивой работы ступени. Это подтверждает тот факт, что такие методы воздействия на течение в пограничном слое можно

рассматривать не только как способ повышения эффективности работы ступени на расчетном режиме, но и как средство расширения диапазона безотрывного обтекания лопаточных венцов на нерасчетных режимах. Это особенно важно для газотурбинных двигателей самолетов военного назначения, эксплуатация которых характеризуется широким диапазоном изменения режимов работы двигателя. Однако, явление расширения диапазона безотрывного обтекания в процессе пространственной оптимизации нуждается в специальных исследованиях

8.6. Постановка задачи оптимизации параметров многоступенчатого компрессора.

Важной задачей при проектировании многоступенчатого осевого компрессора является определение оптимального количества ступеней и оптимального распределения работы между ступенями, поскольку условия работы ступени в многоступенчатом компрессоре значительно отличаются от работы изолированной ступени.

В данном случае будем считать заданной величиной работу компрессора, а варьируемыми параметрами - число ступеней и окружные скорости (диаметры).

Рассмотрим задачу оптимального распределения работы между ступенями осевого компрессора при заданном законе изменения осевой составляющей скорости в его проточной части.

Математическая постановка задачи

Расчетная схема многоступенчатого компрессора представлена на рис. 8.31.

Осевые составляющие скорости $c_{j,a}$ выразим через осевую скорость на входе в компрессор $c_{0,a}$:

$$c_{j,a} = K_{j,a} c_{0,a}, \quad (j=1...2n), \quad (8.40)$$

где $K_{j,a}$ - заданные коэффициенты.

Форму средней линии проточной части компрессора определим при помощи коэффициентов

$$K_{j,u} = \frac{u_j}{u_0}, \quad (j=1...2n) \quad (8.41)$$

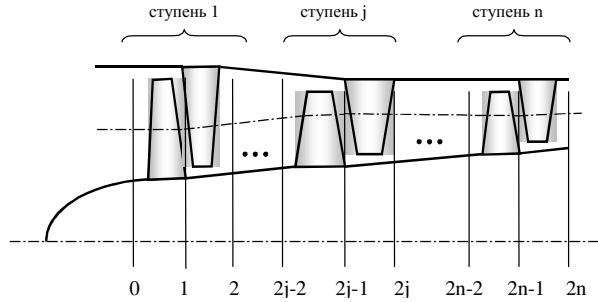


Рис. 8.31. Расчетная схема многоступенчатого компрессора, состоящего из n ступеней.

Геометрию проточной части компрессора после оптимизации можно определить при помощи уравнения неразрывности, записанного для каждого сечения в осевых зазорах

$$G = c_{0,a} \rho_0 F_0 = c_{j,a} \rho_j F_j, \quad (j=1...2n). \quad (8.42)$$

Пусть известны параметры рабочего тела на входе в многоступенчатый компрессор и давление на выходе из него, то есть известна степень повышения давления компрессора π_k^* , состоящего из n ступеней. Процесс сжатия воздуха в многоступенчатом компрессоре представлен на i - S -диаграмме (рис. 8.32).

К.п.д. многоступенчатого компрессора можно определить по формуле

$$\eta_k^* = \frac{H_{ад.к}^*}{H_m} = \frac{H_{ад.к}^*}{\sum_{j=1}^n (H_m)_j} = \frac{i_{ад.2n}^* - i_0^*}{\sum_{j=1}^n (i_{2j}^* - i_{2j-2}^*)}, \quad (8.43)$$

Определяя теоретический напор на среднем радиусе компрессора по формуле Эйлера и, учитывая, что $w_{1u} = u_1 - c_{1u}$,

$w_{2u} = u_2 - c_{2u}$ $c_{1u} = c_{1a} \operatorname{ctg} \alpha_1$, $c_{2u} = c_{2a} \operatorname{ctg} \alpha_2$, а также с учётом (8.40) и (8.41), получим:

$$\eta_{\kappa}^* = \frac{\frac{k}{k-1} R T_0^* \left(\pi_{\kappa}^{* \frac{k-1}{k}} - 1 \right)}{\sum_{j=1}^n \left(u_0^2 (K_{2j-2,u}^2 - K_{2j-1,u}^2) - u_{0,a} (K_{2j-2,u} K_{2j-2,a} \operatorname{ctg} \alpha_{2j-2} - K_{2j-1,u} K_{2j-1,a} \operatorname{ctg} \alpha_{2j}) \right)} \quad (8.44)$$

Ограничение, полученное из уравнения сохранения энергии,

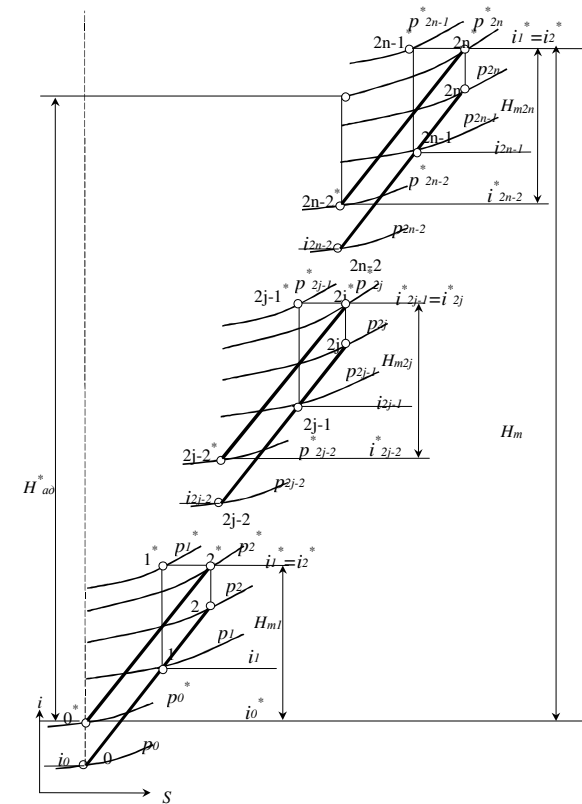


Рис. 8.32. i-S-диаграмма процесса сжатия в проточной части многоступенчатого компрессора.

записанного для многоступенчатого компрессора, можно записать в виде

$$A_1 \equiv i_{2n}^* - i_0^* - \sum_{j=1}^n (L_{j,a\partial,cm}^* - \Delta L_{j,r} - L_{j,r(PK)} - L_{j,r(HA)}) = 0 \quad (8.45)$$

Если считать, что тепловое сопротивление в компрессоре приближенно определяется соотношением

$$\Delta L_r \approx L_r \frac{\Delta T_{cp}}{2T_{cp}} = L_r \frac{T_{2n} - T_0}{2 \frac{(T_{2n} + T_0)}{2}} = L_r \frac{T_{2n} - T_0}{(T_{2n} + T_0)},$$

то после преобразований получим:

$$\begin{aligned} A_1 = & i_{2n}^* - i_0^* + 0,5c_{0,a}u_0 \sum_{j=1}^n (K_{2j,a}^2 + (K_{2j,u} - K_{2j,a} \operatorname{ctg} \alpha_{2j})^2) - \\ & - 0,5c_{0,a}u_0 \sum_{j=1}^n (K_{2j-2,a}^2 + (K_{2j-2,u} - K_{2j-2,a} \operatorname{ctg} \alpha_{2j-2})^2) - \frac{k}{k-1} RT_0^* (\pi_K^{*\frac{k-1}{k}} - 1) - \\ & - L_r \frac{(T_{2n} - T_0)}{(T_{2n} + T_0)} - 0,5c_{0,a}u_0 \sum_{j=1}^n \xi_{j(PK)} (K_{2j-2,a}^2 + (K_{2j-2,u} - K_{2j-2,a} \operatorname{ctg} \alpha_{2j-2})^2) - \\ & - 0,5c_{0,a}^2 \sum_{j=1}^n \xi_{j(HA)} K_{2j-1,a}^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_{2j-1}) = 0 \end{aligned} \quad (8.46)$$

Потери в решетках ($\xi_{j(PK)}$, $\xi_{j(HA)}$), можно рассчитать с использованием одной из известных методик [156,164,165], либо путём расчёта, течения вязкого газа в решетках профилей.

Задача может быть поставлена двумя различными способами.

1-й способ. Ставится задача определения K_{ji} таким образом, чтобы при заданных параметрах c_{0a} , K_{ja} , α_j , π_K^* , p_0^* , T_0^* , G_6 , и принятых из каких-либо соображений (либо определяемых по одной из известных методик) величин коэффициентов потерь в

рабочих колесах и направляющих аппаратах ($\xi_{j(PK)}$, $\xi_{j(HA)}$), достигался максимум целевой функции (8.44) и удовлетворялось ограничение (8.46). В этом случае определяется форма средней линии компрессора, а следовательно и форма его проточной части.

2-й способ. Ставится задача определения α_j таким образом, чтобы при заданных параметрах c_{0a} , K_{ja} , K_{ju} , π_k^* , p_0^* , T_0^* , G_g и определяемых по одной из известных методик, величин коэффициентов потерь в рабочих колесах и направляющих аппаратах, достигался максимум функционала (8.44) и удовлетворялось ограничение (8.46). В этом случае при заданной форме проточной части определяются оптимальные значения углов α_j , соответствующие оптимальному распределению работы между ступенями многоступенчатого компрессора.

Математическая запись, сформулированной таким образом задачи, будет иметь следующий вид:

Найти

$$\begin{aligned} & \max_{K_{j,u}} \eta_K^* \\ & (j = 1 \dots 2n) \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} & \max_{ctg \alpha_j} \eta_K^* \\ & (j = 1 \dots 2n) \end{aligned}$$

С использованием метода штрафных функций сведем задачу с ограничениями к задаче без ограничений для присоединенной целевой функции, после чего целевой функционал будет иметь следующий вид

$$F = \eta_K^* - \lambda A_1^2, \quad (8.47)$$

где λ - штрафной коэффициент.

Максимизация целевого функционала многих переменных (8.47) может производиться с использованием одного из известных методов нелинейного программирования [16].

ГЛАВА 8. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ОСЕВЫХ КОМПРЕССОРОВ	292
8.1. Общая постановка задачи оптимизации осевого компрессора.	294
8.2. Оптимизация конструктивных лопаточных углов ступени осевого компрессора в осевых зазорах.	298
8.3. Особенности оптимизации сверхзвуковых ступеней.	312
8.4. Оптимизация параметров сложного навала и стреловидности лопаточных венцов компрессора.	318
8.5. Численный пример оптимизации ступени компрессора.	320
8.6. Постановка задачи оптимизации параметров многоступенчатого компрессора.	331

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Палагин А. А. Автоматизация проектирования тепловых схем турбоустановок. – Киев: Наук. думка, 1983. – 180 с.
2. Бойко А. В. Оптимальное проектирование проточной части осевых турбин. – Харьков: Вища школа, 1982. – 152 с.
3. Бойко А. В., Говорущенко Ю. Н. Задачи проектирования осевых турбинных ступеней. – Изд. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985. - №3. – С. 134-140.
4. Бойко А. В., Кожевников С. Н., Мельтюхов В. А. Оптимизация формы дозвуковых профилей решеток осевых турбин. – Изд. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1984. - №6. – С. 119-124.
5. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. – М.: Высшая школа, 1980. – 311 с.
6. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Экономика, 1975. – 700 с.
7. Box E. P., Benken D. W. Some new three level design for the study of quantitative variables. – Technometrics, 1960, 2, №4, P. 455-475.
8. Craig H. R. M., Cox H. J. A. Performance Estimation of Axial Flow Turbines. The Sust. Of Mech. Eng/ Proc, 1970/71, vol. 185, 32/71, P. 407-424.
9. Бойко А. В., Говорущенко Ю. Н. Об оптимизации параметров элементарной турбинной ступени. – Энергет. машиностроение, 1980. – Вып. 29. – С. 38-41.
10. Бойко А. В., Говорущенко Ю. Н., Усатый А. П. Создание эмпирической методики определения коэффициентов потерь энергии в турбинных решетках с помощью теории планирования эксперимента. – Энергет. машиностроение, 1986. – Вып. 42. – С. 8-14.
11. Жуковский М.И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах.- Л.: Машиностроение. 1967.- 288 с.
12. Wu Chung Hua. A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed-Flow Types // Transactions of the ASME, 1952, vol.74, № 8, p. 1363-1380.
13. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин.- М: ГИФМЛ. 1962.-512 с.
14. Сироткин Я.А. Аэродинамический расчет потока осевых турбомашин. М.: Машиностроение, 1972,448 с.
15. Бойко А.В., Говорущенко Ю.Н. Основы теории оптимального проектирования проточной части осевых турбин. Х.: Вища школа, Изд-во при ХГУ, 1989.-217 с.

16. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование, Пер. с англ. М.: Мир. 1975.- 535 с.
17. Дорфман Л.А. Численные методы в газодинамике турбомашин. Л.: Энергия, 1974, 270 с.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. .Ред. И.Г. Араманович. М.: Наука, 1979, 632 с.
19. Левина М.Е., Фролов Б.И., Шевченко В.А. Экспериментальное исследование структуры потока в ступенях с короткими лопатками. .. В респ.межв.сб.: Энергетическое машиностроение. Вып. 31, Харьков, 1981, с. 4-8.
20. Фролов Б.И. Турбинные ступери с обратной закруткой, нечувствительные к величине периферийных зазоров. Автореферат канд. дисс. Харьков: ХПИ, 1979, 26 с.
21. Алберг Дж., Нильсон Э., Холш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1972, 316 с.
22. Левина М.Е., Гребнев В.К. Исследование потерь в серии турбинных ступеней с различными законами закрутки при $D_{cp}/l=5,13$.// Изв. Вузов. Энергетика, 1966, №10, с 52-61.
23. Шведова Т.И. Аэродинамическое совершенствование ступеней с малым втулочным отношением: Автореферат канд. дисс. Харьков: ХПИ, 1975, 24 с.
24. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978, 730 с.
25. Щегляев А.В. Паровые турбины. М.: Энергия, 1976, 357 с.
26. Абрамов В.И., Филиппов Г.А., Фролов В.В. Тепловой расчет турбин.- М.: Машиностроение, 1974, 184 с.
27. Кириллов И.И. Теория турбомашин. Л.: Машиностроение, 1972, 511 с.
28. ОСТ 108.260.02-84. Профили рабочих лопаток постоянного сечения паровых стационарных турбин. Типы, основные параметры и размеры. НПО ЦКТИ. 1985.-30 с.
29. ОСТ 108.260.01-84. Профили направляющих лопаток постоянного сечения паровых стационарных турбин. Типы, основные параметры и размеры. НПО ЦКТИ. 1985.-35 с.
30. Аронов Б.М., Жуковский М.И., Журавлев В.А. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин,- М.:Машиностроение, 1975.- 192 с.
31. Кулагина Г.Ф. Экспериментальное исследование напряжений и прогибов диафрагм. – Исследования элементов паровых и газовых турбин и осевых компрессоров, 6. Машгиз, 1960.
32. Розенблюм В.И., Чернина В.С. К расчету прочности турбинных диафрагм. "Энергомашиностроение", 1963, 10 с.

33. Свойства тел и сплавов, применяемых в котлотурбостроении. Л., Центр. научно-иссл. и проект.-констр. Котлотурб. институт им Ползунова, 1966.
34. РТМ 108.021.106-77. Расчет на прочность рабочих лопаток. М.: Министерство тяжелого, энергетического машиностроения, 1983.
35. Жирицкий Г.С., Стрункин В.А. Конструкция и расчет на прочность деталей паровых и газовых турбин. М.: Машгиз, 1968.
36. Шубенко-Шубин Л.А. Прочность паровых турбин., М.: Машиностроение, 1973.
37. Разработка и исследование проточных частей турбин, эффективно работающих в условиях больших и нерегулируемых отборов (КТ-1070-60/1500). Отчет о НИР № 01.86.0.135359 кафедры турбиностроения ХПИ, Харьков, 1987.- 40 с.
38. Дейч М.Е., Трояновский Б.М. Исследование и расчеты ступеней осевых турбин. М.: Машиностроение, 1964.
39. Стоянов Ф.А. Оптимальное автоматизированное проектирование проточных частей осевых турбин.- Киев: Наук. думка, 1989. - 176 с.
40. Основы проектирования турбин авиадвигателей./ А.В. Деревянко, В.А. Журавлев, В.В. Зикеев и др./ под ред. С.З. Копелева.- М.: Машиностроение, 1988.- 328 с.
41. Юза Я. Уравнения термодинамических свойств воды и водяного пара, предназначенные для вычислительных машин. // Теплоэнергетика, 1967, №1, с. 80-86.
42. Индурский М.С. Простые формулы для параметров водяного пара в расчетах ЦНД турбин на ЭВМ. // Теплоэнергетика, 1975, №5, с. 92-93.
43. Петренко А.И. Основы автоматизации проектирования. - К.: Техніка, 1982. - 295 с.
44. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. М.: Металлургия, 1976. – 128 с.
45. Моделирование и оптимизация проточных частей многоступенчатых турбин с использованием методов теории планирования эксперимента.- Отчет НИР № 0.01.01.01.06.Н кафедры турбиностроения ХПИ, Харьков, 1988. - 101 с.
46. Романов Г.Л. Автоматизированное проектирование оптимальных унифицированных проточных частей ЦВД мощных паровых турбин. Дисс. канд. техн. наук. Харьков: ХПИ, 1988, 255 с.
47. Кудевичкий Я.В. Фасонные фрезы.- Л.: Машиностроение,-1978.176 с.
48. Гардан И.,Люка М. Машинная графика и автоматизация конструирования. Пер. с франц.- М.: Мир. 1987.- 270 с.
49. Шпур Г. Краузе Ф.Л. Автоматизированное проектирование в машиностроении. Пер. с нем.- М.: Машиностроение. 1988 - 650с.

50. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации.- М.: Наука. 1976.- 215 с.
51. 3D Flow Simulation in Turbomachinery: The ERCOFTAC Seminar and Workshop, 6–10 Jan. 1997, Courchevel, France. – 1997. – 193 p.
52. Denton J.D. Designing in three dimensions // AGARD Lecture Series. Turbomachinery Design Using CFD. – 1994. – P. 3-1 – 3-14.
53. Ершов С.В., Русанов А.В. Комплекс программ розрахунку тривимірних течій газу в багатоступінцевих турбомашинах “FlowER”. Свідectvo про державну реєстрацію прав автора на твір, ПА № 77. Державне агенство України з авторських та суміжних прав, 19.02.1996.
54. Диксон С.Л. Механика жидкостей и газов. Термодинамика турбомашин. - М.: Машиностроение; 1981. - 213 с.
55. Индурский М.С., Ржезников Ю.В. Метод расчета осесимметричного потока в ЦНД паровой турбины // Теплоэнергетика. – 1977. – № 10. – С. 17–22.
56. Иванов М.Я., Кимасов Ю.И. Численное решение прямой задачи для осредненного осесимметричного потока идеального газа в ступени турбомшины // Технический отчет ЦИАМ, №7281. – 1994. –38 с.
57. Чой Д.; Найт Ч.Дж. Расчет трехмерного вязкого течения в прямой решетке профилей // Аэрокосмич. техника. -1990. - № 1. - С. 108-115.
58. Иванов М.Я.; Крупа В.Г. Неявный нефакторизованный метод расчета турбулентных течений вязкого теплопроводного газа в решетках турбомашин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1991; **31**; № 5. - С.754-766.
59. Ершов С.В.; Русанов А.В. Численный метод расчета пространственных турбулентных течений в венцах турбомашин // Международная науч.-техн. конф. Совершенствование энергетических и транспортных турбоустановок методами математического моделирования; вычислительного и физического экспериментов; Змиев; 26-29 сент. 1994 г.: Тез. докл.: В 3-х ч. / НАН Украины и др. - Харьков; Ин-т пробл. машиностр. НАН Украины; 1994. - Ч. 1. - С. 9.
60. Dawes W.N. Toward improved throughflow capability. The use of 3D viscous flow solvers in a multistage environment // ASME Pap. - 1990; № GT - 18. - P. 1-10.
61. Denton J.D. The calculation of 3D viscous flow through multistage turbomachines // ASME Pap. - 1990; № GT - 19. - P. 1-15.
62. Denton J.D. Lessons from Rotor 37// Proc. 3rd Internat. Symp. Aerothermodynamics of Internal Flows. – Sept. 1996, Beijing, China. – 1996. – P. 3–14.

63. Иванов М.Я.; Крупа В.Г. Расчет трехмерного течения вязкого газа в прямой решетке профилей // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. - 1993; № 4. - С. 58-68.
64. Теоретические основы конструирования численных алгоритмов задач математической физики / Н.Н.Анучина; К.И.Бабенко; С.К.Годунов и др. - М.: Наука; 1979. - 226 с.
65. Численные методы в динамике жидкостей / Г.Вирсу; Ж.Смолдрен. - М.: Мир; 1981.- 407 с.
66. Андерсон Д.; Таннехилл Дж.; Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен.- М.: Мир; 1990.- 726 с.
67. Беляев Н.М.; Приходько А.А. Численные методы решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа. - Днепропетровск: ДГУ; 1986.- 140 с.
68. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир; 1980. - 616 с.
69. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.- М.: Мир; 1991.- Т.2. 552с.
70. McNally W.D.; Sockol P.M. Review - Computational methods for internal flows with emphasis on turbomachinery // Trans. ASME. J.Fluid eng. - 1985; **107**; № 1. - P. 6-22.
71. Shang J.S. An assessment of numerical solutions of the compressible Navier-Stokes equations // AIAA J. - 1985; **23**; № 5. - P. 353-370.
72. Stow P. Modelling viscous flows in turbomachinery. - Thermodynamics and fluid mechanics of turbomachines. - 1985. - P. 37-71.
73. Turkel E. Progress in computational physics // Comput. and Fluids. - 1983; **11**; № 2. - P. 121-144.
74. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К.Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. - 1986; **17**; № 2.- С. 18-26.
75. Ершов С.В. Математическое моделирование трехмерных вязких течений в турбомашинах – современный взгляд // Пробл. машиностроения. – 1998. – **1**, № 2. – С. 76–93.
76. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К.Годунов; А.В.Забродин; М.Я.Иванов и др.- М.: Наука; 1976. - 400 с.
77. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. - 1983; **49**; № 3. - P. 357-393.
78. Yee H.C.; Warming R.F.; Harten A. Application of TVD schemes for the Euler equations of gas dynamics // Lectures in Applied Mathematics. - 1985; **22**. - P. 357-377.
79. Колган В.П. Применения принципа минимальных значений производной и построение конечно-разностных схем для расчета

- разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та; - 1972; **3**; № 6.- С. 68-77.
80. Rumsey C.L.; Anderson W.K. Some numerical and physical aspects of unsteady Navier-Stokes computations over airfoils using dynamics meshes // AIAA Pap. - 1986; № 247. - P. 1-13.
 81. Chakravarthy S.R.; Szema K.Y.; Goldberg V.C.; Gorski J.J. Application of a new class of high accuracy TVD schemes to the Navier-Stokes equations // AIAA Pap. - 1985; № 165. - P. 1-12.
 82. Иванов М.Я.; Крупа В.Г.; Нигматуллин Р.З. Неявная схема С.К.Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье-Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1989. - № 6. - С. 888-901.
 83. Иванов М.Я.; Нигматуллин Р.З. Неявная схема С.К.Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера // Журн. вычисл. математики и мат. физики.- 1987; **27**; № 11.- С. 1725-1735.
 84. Ландау Л.Д.; Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. - М: Гостехиздат; 1954.- 795с.
 85. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х т.- М.: Наука; 1973.- Т.1. 536 с.
 86. Baldwin B.S.; Lomax H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows //AIAA Pap.- 1978; № 257.- 8 p.
 87. Steger J.L. Implicit finite difference simulation of flow about arbitrary two dimensional geometries // AIAA J. - 1978; **16**; № 7. - P. 679-686.
 88. Numerical simulation of 3D flow in axial turbomachines / S.Yershov, A.Rusanov, A.Gardzilewicz et al. // Task Quarterly. – 1998. – **2**, № 2. – P. 319–347.
 89. Турбулентность / Брэдшоу П.; Себеси Т.; Фернгольд Г.-Г. и др.- М.: Машиностроение; 1980.- 343 с.
 90. Menter F.R. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications. // AIAA J. – 1994. – **32**, № 11. – P. 1299–1310.
 91. Cebeci T.;Smith A.M.O.; Mosinskis G. Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary layer // AIAA J.- 1970; **8**; № 11. - P. 1974-1982.
 92. Kinsey D.W.; Eastep F.E. Navier-Stokes solution for a thick supercritical airfoil with strong shocks and massively separated flow // AIAA Pap. - 1988; № 0706. - 9p.
 93. Rody W.; Srinivas K. Computation of flow and losses in transonic turbine cascades // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. - 1989; № 13. - P. 101-119.

94. Colantuoni S.; Terlizzi A.; Grasso F. A validation of a Navier-Stokes 2D solver for transonic turbine cascade flows // AIAA Pap. - 1989; № 2451. - P. 1-9.
95. Degani D; Schiff L.B. Computation of turbulent supersonic flows around pointed bodies having crossflow separation // J. Comput. Physics. - 1986; **66**; № 1. - P. 173-196.
96. Shang J.S. Numerical simulation of wing-fuselage aerodynamic interaction // AIAA J. - 1984; **22**; № 10. - P. 1345-1353.
97. Yershov S.V., Rusanov A.V. Modification of algebraic turbulence model used in code **FlowER**® // Modelowanie turbulencji w zastosowaniach technicznych. Zeszyty Naukowe IMPPAN 486/1448/97 Gdansk, 1997. – P. 95–102.
98. Chima R.V.; Yokota J.W. Numerical analysis of three-dimensional viscous internal flows // AIAA J. - 1990; **28**; № 5. - P 798-806.
99. Choi D.; Knight C.J. Development of viscous cascade code based on scalar implicit factorization // AIAA J. - 1989; **27**; № 5. - P. 581-594.
100. Denton, J.D. Learning flow physics from turbomachinery flow calculations // ISAIF/93 :Ed. Dvorak; R. and Kvapilova; J.); Proceedings of the Int. Symp. on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows; Prague; Czech Republic; 1993; SCMP Publication; Prague; 1993. - P. 23-51.
101. Rusanov, A.V., Yershov, S.V. Numerical method for calculation of 3d viscous turbomachine flow taking into account stator / rotor unsteady interaction. The 4th Colloq. Process Simulation, ed. A. Jokilaakso, 11–13 June 1997, Espoo, Finland, 1997. – P. 179–197.
102. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Letters in Heat and Mass Transfer. – 1974. – **1**, № 2. – P. 131–138.
103. Takemitsu N. An analytical study of the standard k - ϵ model // J. Fluid Mech. – 1990. – **112**, № 6. – P. 192–198.
104. Huang P.G., Bradshaw P. Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients // AIAA J. – 1995. – **33**, № 4. – P. 624–632.
105. Yoon B.K., Chung M.K. Computation of compression ramp flow with a cross-diffusion modified k - ϵ model // AIAA J. – **33**, № 8. – 1995. – P. 1518–1520.
106. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA J. – 1988. – **26**, № 11. – P. 1299–1310.
107. Bardina J.E., Huang P.G., Coakley T.J. Turbulence modeling validation, testing, and development // NASA TM–110446. – 1997. – 98 p.

108. Forsythe J.R., Strang W.Z., Hoffmann K.A. Validation of several Reynolds-averaged turbulence models in a 3-D unstructured grid code // AIAA Paper. – 2000. – № 2552. – 20 p.
109. Rogers S.E., Menter F., Durbin P.A., Mansour N.N. A comparison of turbulence models in computing multi-element airfoil flows // AIAA Paper. – 1994. – № 291. – 13 p.
110. Ершов С.В.; Русанов А.В. Численный метод расчета турбулентных отрывных течений в пространственных решетках / НАН Украины; Ин-т пробл. машиностр. - Харьков; 1994. - 28 с. - Деп. в ВИНТИ 08.08.94; № 2063-B94.
111. Denton J.D. Solution of the Euler equations for turbomachinery flows. - Thermodynamics and Fluid Mechanics of Turbomachines. - 1985. - P. 283-345.
112. Abarband S.; Bayliss A.; Lustman L. Non-reflecting boundary conditions for compressible Navier-Stokes equations // Comput. Meth. Appl. Sci. and Eng. 7. Proc 7th Int. Symp.; Versailles; Dec. 9 - 13; 1985. - Amsterdam; 1986. - P. 261-274.
113. Nordstrom J. The influence of open boundary conditions on the convergence to steady state for the Navier-Stokes equations // J. Comput. Phys. - 1989; **85**; № 1. - P. 210-244.
114. Oliger J.; Sundstrom A. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics // SIAM J. Appl. Math. - 1978; **35**; № 3. - P. 419-446.
115. Rudy D.H.; Strikwerda J.C. Nonreflecting outflow boundary conditions for subsonic Navier-Stokes calculations // J. Comput. Phys. - 1980; **36**; № 1. - P. 55-70.
116. Chima R.V. Inviscid and viscous flows in cascades with an explicit multiple-grid algorithm // AIAA J. - 1985; **23**; № 10. - P. 1556-1561.
117. Rai M.M. Three-dimensional Navier-Stokes simulations of turbine rotor-stator interaction // Journal of Propulsion and Power. - 1989; **5**; № 3; - P. 305-319.
118. Menter F.R., Rumsey L.C. Assessment of two-equation turbulence models for transonic flows // AIAA Paper. – 1994. – № 2343. – 16 p.
119. Lai K.Y.M., Makomaski A.H. Three-dimensional flow pattern upstream of a Surface-Mounted Rectangular Obstruction // J. Fluids Engineering. – 1989. – **69**, № 4. – P. 449-463.
120. Harten A.; Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // SIAM J. Num. Analysis. - 1987; **24**; № 2. - P. 279-309.
121. Ершов С.В. Обобщение метода Годунова-Колгана для расчета нестационарных решений газовой динамики со вторым порядком

- точности //АН УССР. Ин-т пробл. машиностр. - Харьков; 1985. - 19 с. - Деп. в ВИНТИ 03.07.86; № 4830-В-86.
- 122.Ершов С.В. Расчет течений вязкого газа неявным монотонным методом С.К.Годунова второго порядка во всех точках решения // Пробл. машиностроения. - 1991. - Вып. 35. - С. 77-83.
 - 123.Ершов С.В. Численный метод расчета течений невязкого и вязкого газа в решетках профилей // АН Украины. Ин-т пробл. машиностр.- Харьков; 1992. - 83 с. - Деп. в ВИНТИ 29.12.92; № 3696-В92.
 - 124.Ершов С.В. Квазимоноотонная ENO схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса // Мат. моделирование. - 1994. - 6, N 11. - С. 58-64.
 - 125.Fryxell B.A.; Woodward P.R.; Colella Ph.; Winkler K.-H. An implicit-explicit hybrid method for lagrangian hydrodynamics // J; Comput. Phys. - 1986; 63; № 2. - P. 283-310.
 - 126.Ершов С.В. Численное моделирование турбулентных отрывных течений в плоских решетках // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1994; № 1. - С. 69-72.
 - 127.Бахвалов Н.С. Численные методы.- М.: Наука; 1973.-632 с.
 - 128.Ni R.-H. Prediction of 3D multi stage turbine flow field using a multiple grid Euler solver // AIAA Pap. - 1989; № 0203. -P. 1-12.
 - 129.Лэнгстон Л.С.; Найс М.Л.; Хупер К.М. Трехмерное течение в канале турбинной решетки // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Энергет. машины и установки. - 1977; - № 1. - С. 22-31.
 - 130.Ходсон Х.Р.; Домини Р.Дж. Пространственное течение в решетке профилей турбины низкого давления на расчетном режиме // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Энергет. Машины и установки. - 1988; - № 2. - С. 116-126.
 - 131.Kang S., Hirsch C. NASA Compressor Rotor37 Test Case // 3D Flow Simulation in Turbomachinery: The ERCOFTAC Seminar and Workshop, 6-10 Jan. 1997, Courchevel, France. - 1997. - P. 1-10.
 - 132.Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
 - 133.Hooke R., Jeeves T.A. Direct search solution of numerical and statistical problems // Journal of the Association for Computing Machinery (ACM). - 1961. - 8, № 2. - P. 212-229.
 - 134.Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач - М., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. - 552 с.
 - 135.Torczon V. On the convergence of the multidirectional search algorithm // SIAM J. Optimization. - 1991. - 7, № 1. - P. 1 - 25.
 - 136.Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // The Computer Journal. - 1965. - 7, № 1. - P. 308-313.

- 137.Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.
- 138.Hawtorne W.R. Thermodynamics of Cooled Turbines. Part I. The turbine stage. Part II. The Multistage Turbine. // Trans of ASME, 78, 1956.
- 139.Baily F.C., Cotton K.C., Spencer R.C. Predicting the performance of large steam turbogenerator operating with saturated and low super heat steam conditions.- Proc. Amer. Power. Conf. 1967, 29, p.5-64.
- 140.Рабочий проект САПР "Паротурбинная установка", часть 3 "Комплексный тепловой расчет паротурбинной установки", ПОАТ "ХТЗ" им. С.М. Кирова, 1990, 386 с.
- 141.Разработка программ расчета лопаточных аппаратов постоянного сечения с учетом работы проточной части турбины К-120-7,5. Отчет ГМП "Турбинист ХПИ", 1991, 77 с.
- 142.Гончаренко Л.В. Исследование турбинных ступеней с повышенной нагрузкой. Дисс. ... канд. техн. наук.- Харьков, ХПИ, 1979.- 205 с.
- 143.He L. Modeling issues for computation of unsteady turbomachinery flows // VKI-LS. - 1996. - № 5. - 10 p.
- 144.Jung A., Mayer J.F., Stetter H. Simulation of 3D unsteady stator/rotor interaction in turbomachinery stages of arbitrary pitch ratio // ASME Pap. - 1996. - 96-GT-069. - 12 p.
- 145.Gardzilewicz A., Yershov S., Rusanov A. et al. Increasing the efficiency of cylindrical stages of impulse turbines with the help of 3D flow computations // Modelling and Design in Fluid-Flow Machinery: Proc. IMP'97 Conf., 18-21 Nov. 1997, Gdansk, Poland. - 1997. - P. 131-139.
- 146.Gardzilewicz A., Yershov S., Rusanov A., Lampart P., Topolski J. Modernization of a turbine stage by means of compound lean // Прогресс. Качество. Технология. Материалы Третьего конгресса двигателестроителей Украины с иностранным участием. - Харьковский государственный аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского (ХАИ). - 1998. - С. 120 - 124.
- 147.Ершов С.В., Русанов А.В. Численное моделирование турбулентных отрывных течений в пространственных решетках с использованием неявной ENO схемы С.К.Годунова // Пробл. машиностроения. - 1998. - 1, № 1. - С. 70-78.
- 148.Pierret S., Braembussche R.A. Van den. Turbomachinery blade design using Navier-Stokes solver and artificial neural network // ASME Paper. - 1998. - 98-GT-4. - 8 p.
- 149.Demeulenaere A., Braembussche R.A. Van den. A two-dimensional Navier-Stokes inverse solver for compressor and turbine blade design // 2nd European Conference on turbomachinery, fluid dynamics and

- thermodynamics, 5-7 March 1997, Antwerpen, Belgium. - 1997. - P. 339-346.
150. Pierret S., Braembussche R.A. Van den. Three-dimensional inverse design method for turbine and compressor blades // 3rd International Symposium on Aerothermodynamics of Internal Flows, Sept. 1996, Beijing, China. - 1996. - P. 73-80.
 151. Trigg M.A., Tubby G.R., Sheard A.G. Automatic genetic optimization approach to two-dimensional blade profile design for steam turbines // Transaction of ASME. Journal of Turbomachinery. - 1999. - 121, № 1. - P. 11-17.
 152. Численная оптимизация лопаточных аппаратов осевого компрессора с учетом пространственного характера их обтекания вязким сжимаемым газом / Ю.М.Терещенко, С.Д.Северин, В.Н.Дыхановский, М.В.Тапол // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: Тр. международ. науч.-техн. конф./НАН Украины и др. - Харьков: Ин-т пробл. машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины, 1997. - С. 183-188.
 153. Ершов С.В., Шапочка А.Ю. Пространственное профилирование лопаточных аппаратов турбинной ступени на основе решения задач трехмерного вязкого течения и оптимизации // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: Сб. научн. трудов Редкол.: Ю.М.Мацевитый (отв. ред.) и др. - Харьков: Ин-т проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины, 2000. - С. 171-178.
 154. Torczon V.J. Multi-Directional Search: A Direct Search Algorithm for Parallel Machines // A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy Approved. - Rice University. - Houston, Texas. - 1989. - 114 P.
 155. Goldberg D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. - Addison-Wesley Publishing Company Inc. - Massachusetts. - 1989.
 156. Холщевников К.В., Емин О.Н., Митрохин И.Т. Теория и расчет авиационных лопаточных машин. М: Машиностроение, 1986. С. 155-158.
 157. Чуев Ю.В., Спехова Г.П. Технические задачи исследования операций. - М.: Сов. радио, 1971. 244с.
 158. Denton J.D. Loss mechanisms in turbomachines. ASME J Turbomachinery, Vol 15, October 1993.

159. Freeman C., Cumpsty N. A method for the prediction of supersonic compressor blade performance. Paper to the 34-th ASME Gas Turbine Conference and Exposition, Toronto, 1989.
160. Sulam D.H., Keenan M.J., Flynn J.T. Single stage evaluation of highly-loaded high-Mach-number compressor stages. II Data and performance multiple-circular-arc rotor. NASA Contract report CR-72694.
161. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов.- М.: Стройиздат, 1982. 520с.
162. Severin S.D., Dihanovsky V.N. Numerical optimisation of compressor stage geometrical parameters for maximum efficiency with regard to 3D viscous flow. – Proceedings of the 4th International Colloquium on Process Simulation, Helsinki, ISSN 1455-2329, ISBN 951-22 3574-9, 1997. – 16p.
163. Severin S.D., Dihanovsky V.N. Numerical optimisation of compressor blades geometrical parameters with regard to 3D viscous flow. – Proceedings of the IPM'97 Conference on Modelling and Design in Fluid-Flow Machinery, Gdansk, ISBN:83-907526-4-6, 1997. – 8p
164. Liblein S. Loss and stall analysis of compressor cascades. Trans. Of the ASME, D-81, №3, p. 387-400.
165. Емин О.Н., Новиков А.С. Выбор параметров компрессоров ГТД. М: МАИ, 1982. 33 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ГЛАВА 1 ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТУРБОМАШИН	13
1.1. Математические модели и задача проектирования объекта..	14
1.2. Метод оптимизации сложных технических устройств	16
1.3. Построение ФММ подсистем и численные методы решения локальных задач оптимизации	19
1.4. Оптимизация параметров проточной части осевой турбины	21
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТУРБОМАШИН	25
2.1. Аэродинамические модели	25
2.1.1 Моделирование осесимметричного течения в ступени осевой турбины	25
2.1.2. Постановка задачи теплового расчета газовой и паровой осевой турбинной ступени по сечениям в зазорах и методы ее решения.	33
2.1.3. Упрощенный метод определения наклона и кривизны линий тока вдоль радиуса в сечениях перед и за рабочим колесом	44
2.1.4. Расчет течения рабочего тела через плоские решетки	50
2.1.5. Автоматизация расчетов проточных частей многоступенчатых паровых турбин на переменных режимах	51
2.2. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ РАСЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ, ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ	59
2.2.1 Статистическая оценка геометрических характеристик решеток профилей	59
2.2.2 Математическая модель оценки надежности функционирования диафрагм	65
2.2.3 Математическая модель оценки надежности функционирования рабочих лопаточных венцов	68
2.2.4 Вибрационный анализ	71
2.2.5 Расчет газодинамических характеристик решеток	73
2.3. Моделирование состояния рабочих тел и материалов	77
2.4. Методика создания макромоделей характеристик элементов проточной части осевой турбины	82
2.4.1. Планирование эксперимента	82

2.4.2. Диалоговый анализ ФММ - программа CPLAN	87
2.5 Программный комплекс МАСТЕР как инструмент решения задач расчета проточной части турбомашин	89
ГЛАВА 3. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ТУРБОМАШИНЫ	107
3.1. Основные подходы к решению задачи о вязком трехмерном течении в проточной части турбомшины	108
3.2. Уравнения Навье–Стокса. Приближение тонкого слоя.....	113
3.3. Осреднение по Рейнольдсу. Моделирование турбулентной вязкости	119
3.3.1. Алгебраические модели турбулентности. Модель Болдуина-Ломэкса	121
3.3.2. Дифференциальные модели турбулентной вязкости. Модель SST Ментера.....	126
3.4. Основные преобразования уравнений	129
3.5. Постановка задачи с начальными и граничными условиями	134
3.6. Явно-неявная ENO схема повышенной точности	143
3.7. Численная реализация. Комплекс программ <i>FlowER</i>	151
3.8. Расчет обтекания решеток и ступеней турбомашин	154
3.8.1. Течение в решетке Лэнгстона.....	154
3.8.2 Течение в решетке Ходсона.....	155
3.8.3. Течение в рабочем колесе компрессора Rotor37.....	158
3.8.4. Течение в ступени турбины	161
3.8.6. Течение в многоступенчатых машинах	161
ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ	162
4.1. Общие сведения об экстремальных задачах.....	162
4.1.1 Классификация методов оптимизации	162
4.1.2 Оптимизация функций с помощью дифференцирования	164
4.1.3 Задачи на условный экстремум функции	166
4.1.4. Оптимизация при ограничениях в виде неравенств	168
4.2. Нелинейное программирование	170
4.2.1. Предмет нелинейного программирования	170
4.2.2. Поиск экстремума функции одной переменной	172
4.2.3. Методы оптимизации без ограничений	174
4.2.4 Методы оптимизации при наличии ограничений.....	181
4.3. Методы прямого поиска	185
4.3.1. Метод прямого поиска Хука–Дживса	185
4.3.2. Метод Нелдера–Мида	188
4.4. Псевдослучайный поиск на исходных и	

формальных макромоделях	192
ГЛАВА 5. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ	
ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ТУРБИН	197
5.1. Постановка задач одномерной и квазидвумерной	
оптимизации	197
5.2. Аналитические решения	201
5.3. Оптимизация многоступенчатой турбины	
методом нелинейного программирования	217
5.4. Автоматизация предварительного проектирования	
проточной части многоступенчатых паровых турбин	220
5.5. Исследование и оптимизация многоступенчатых турбин	
с помощью планирования эксперимента	228
5.6. Оптимизация проточной части с учетом работы	
на переменных режимах	231
5.6.1. Макромоделирование и оптимизация параметров	
турбины КТ-40/32-6,4	232
5.6.2. ЦВД турбины К-120-6,4 для ПГУ-345 ХТЗ	235
ГЛАВА 6. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕШЕТОК И	
СТУПЕНЕЙ ТУРБОМАШИН	240
6.1. Метод оптимизации основных геометрических	
параметров решеток профилей	242
6.1.1. Постановка задачи.....	242
6.1.2. Оптимизация рабочих решеток.....	243
6.1.3. Оптимизация сопловых решеток	244
6.1.4. Совместная оптимизация сопловых и	
рабочих решеток	244
6.2. Метода аналитического профилирования.....	245
6.2.1. Постановка задачи.....	245
6.2.2. Построение базовой кривой	246
6.2.3. Граничные условия и построение базового профиля	248
6.3. Разработка профилей оптимальной аэродинамической	
формы, удовлетворяющих прочностным и	
конструктивным требованиям.....	250
6.3.1. Постановка задачи.....	250
6.3.2. Оптимизация решетки профилей	
по геометрическому критерию качества.....	251
6.3.3. Оптимизация по минимуму профильных потерь	253
6.4. Примеры автоматизированного проектирования	
решеток профилей	253
6.5. Реализация метода предварительного проектирования	
многоступенчатой проточной части осевой турбины	263

6.5.1. Программная реализация и ее возможности	263
6.5.2. Примеры расчетов	265
6.6 О влиянии тангенциального навала на характеристики осевой турбинной ступени	267
ГЛАВА 7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПРОФИЛИРОВАНИЕ СТУПЕНЕЙ ТУРБИН	272
7.1. Постановка задачи об оптимальном пространственном профилировании ступеней турбин	274
7.2. Программная реализация. Комплекс программ <i>Optimus</i>	277
7.3. Примеры оптимального пространственного профилирования турбинных ступеней	280
ГЛАВА 8. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ОСЕВЫХ КОМПРЕССОРОВ	292
8.1. Общая постановка задачи оптимизации осевого компрессора	294
8.2. Оптимизация конструктивных лопаточных углов ступени осевого компрессора в осевых зазорах	298
8.3. Особенности оптимизации сверхзвуковых ступеней.	312
8.4. Оптимизация параметров сложного навала и стреловидности лопаточных венцов компрессора	318
8.5. Численный пример оптимизации ступени компрессора.	320
8.6. Постановка задачи оптимизации параметров многоступенчатого компрессора.	331
Список литературы	336

Aerodynamic Computation and Optimal Projection of Turbomachine Flow Paths

CONTENTS

Preface	5
Chapter 1. Problem statement for the optimal projection of technical systems. General issues in turbomachine optimization	13
1.1. Mathematical models and the problem of object projection	14
1.2. Methods of optimizing complicated technical devices	16
1.3. Construction of formal subsystem macromodels and numerical solutions for local optimization problems	19
1.4. Optimization of axial turbine flow path parameters	21
Chapter 2. Mathematical modeling of turbomachinery elements	25
2.1. Aerodynamic models	25
2.1.1 Modelling of axis-symmetric flows in axial turbine stages	25
2.1.2. Organization of the problem of thermal calculation of gas and steam axial turbine stages in section of clearance and solutions	33
2.1.3. Simplified methods for determining the inclination and curvature of stream lines along radius before and after the bladed wheel	44
2.1.4. Calculation of working medium's flow through plane cascades	50
2.1.5. Automation of flow path computation for multistage turbines in variable regimes	51
2.2. Elaboration programs for calculating the geometric, strength and gas dynamic characteristics of turbine profile cascades	59
2.2.1. Statistical evaluation of the geometric characteristics of profile cascades	59
2.2.2. Mathematical model for evaluating the reliability of nozzle functioning	65
2.2.3. Mathematical model for the functioning of bladed wheels	68
2.2.4. Vibration analysis	71
2.2.5. Calculation of gas dynamic characteristics of cascades	73
2.3. Modeling of conditions for working mediums and processes	77
2.4. Method for creating macromodels of axial turbine flow paths	82

2.4.1. Experiment planning	82
2.4.2. Dialog analysis FMM-PLAN program	87
2.5. MACTEP as a tool for calculating turbine flow path	89
Chapter 3. Modern methods for aerodynamic computation of turbine flow paths	107
3.1. The main approaches for the solution of the problem of three-dimensional viscous flow through a turbomachinery flow path	108
3.2. The Navier-Stokes equations. The thin-layer approximation	113
3.3. Reynolds averaging. Modelling of turbulent viscosity	119
3.3.1. Algebraic models of turbulent viscosity. Baldwin-Lomax model	121
3.3.2. Differential models of turbulent viscosity. SST Menter's model	126
3.4. The main transformations of the governing equations	129
3.5. An initial boundary problem statement	134
3.6. Explicit-implicit ENO high-resolution scheme	143
3.7. Numerical implementation using FlowER	151
3.8. Computations of flow through cascade and turbomachinery stages	154
3.8.1. Flow in Langston cascade	154
3.8.2. Flow in Hodson cascade	155
3.8.3. Flow in Rotor 37	158
3.8.4. Flow through turbine stage	161
3.8.5. Flow through multistage turbomachines	161
Chapter 4. Some information about problems with extremes and methods of searching for optimal solutions	162
4.1. General issues in problems with extremes	162
4.1.1. Classification of optimization methods	162
4.1.2. Optimization of functions using differentiation	164
4.1.3. Problems of conditional extreme functions	166
4.1.4. Optimization with inequality restrictions	168
4.2. Non-linear programming	170
4.2.1. Subject of non-linear programming	170
4.2.2. Search for extreme function with one variable	172
4.2.3. Methods of optimization without restrictions	174
4.2.4. Methods of optimization with restrictions	181
4.3. Methods of direct searching	185
4.3.1. Method of direct searching by Hooke-Jeeves	185
4.3.2. Method by Nelder Mead	188

4.4. Pseudo-accidental search regarding initial and formal models	192
Chapter 5. Optimal projection of flow path of multistage turbines	197
5.1. Organization of the problem of one-dimensional and quasi-two-dimensional optimization	197
5.2. Analytical solutions	201
5.3. Optimization of multistage turbines using the nonlinear programming method	217
5.4. Automation of preliminary projection of flow path in multistage turbines	220
5.5. Research and optimization of multistage turbines using experiment planning	228
5.6. Optimization of flow path taking into account variable regimes of turbine operation	231
5.6.1. Macromodelling and parameter optimization of turbine KT-40/32-6,4	232
5.6.2. LPC of turbine K-120-6,4 for steam and gas installation 345 XT3	235
Chapter 6. Optimal projection of turbine cascades and stages	240
6.1. Method of optimization of basic geometric parameters of turbine cascades	242
6.1.1. Problem statement	242
6.1.2. Blade cascade optimization	243
6.1.3. Nozzle cascade optimization	244
6.1.4. Joint optimization of nozzle and blade cascades	244
6.2. Method of analytical profiling	245
6.2.1. Problem statement	245
6.2.2. Designing of basic curve	246
6.2.3. Boundary conditions and basic profile description	248
6.3. Profile elaboration with optimal aerodynamic shape, meeting strength and design requirements	250
6.3.1. Problem statement	250
6.3.2. Cascade optimization using geometric quality criteria	251
6.3.3. Optimization using minimum profile losses	253
6.4. Examples of automated cascade design	253
6.5. Implementation of the preliminary projection method for multistage axial turbine flow paths	263
6.5.1. Program implementation and potentialities	263
6.5.2. Examples of calculations	265

6.6. Influence of tangential lean on characteristics of axial turbine stages	267
Chapter 7. Optimal three-dimensional shaping of turbine stages	272
7.1. Problem statement for optimal 3D shaping of turbine stages	274
7.2. Numerical implementation using Optimus	277
7.3. Examples of optimal 3D shaping of turbine stages	280
Chapter 8. Optimization of compressor flow paths	292
8.1. General optimization of axial compressor flow path	294
8.2. Optimization of constructive blade angles and axial compressor flow paths in axial clearances	298
8.3. Special features of the optimization of supersonic compressor stages	312
8.4. Optimization of parameters for complicated inclination and arrow-shaped bladed compressor wheels	318
8.5. Numerical example of optimal compressor stage	320
8.6. Problem statement for optimization of parameters of multistage compressor	331
References	336

Наукове видання

Бойко Анатолій Володимирович
Говорущенко Юрій Миколайович
Єршов Сергій Володимирович
Русанов Андрій Вікторович
Северін Сергій Дмитрович

Аеродинамічний розрахунок та оптимальне проектування проточної частини турбомашин

В авторській редакції
Технічний редактор Говорущенко К.Ю.
Комп'ютерний набір та верстка Дженюк Н.В.
Художнє оформлення
Коректор

План 2002 р.
Підписано до друку Формат
Папір..... Друк.....
Ум. Друк. Арк. Обл.-вид. арк. Тираж – 700 прим.
Зам №..... Ціна договірна.

ХДПУ, 310002, Харків-2, вул. Фрунзе, 21

Друкарня:
Харків, вул.